Mathématiques - 2 BCPST 2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°2 - A remettre le mercredi 19 septembre 2012

« Fonctions réciproques, Développements limités et suites »

Exercice 1

1. Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle (E) : $y' - (1+\tan x)\,y = e^x$.

2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\tan x)\,e^x \end{array} \right.$

   (a) Montrer que f réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$ *(on notera $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f).*

   (b) Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$; pour $k \in \{1,2,3\}$, calculer $f^{(k)}(0)$.
   On pourra utiliser le fait que f est solution de l'équation différentielle (E).

   (c) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, exprimer g' en fonction de f' et g.

   (d) Montrer que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer g'' en utilisant f'', f' et g.

   (e) Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 3 en 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\,\pi; \frac{\pi}{2} + n\,\pi\right[$.

   (a) Montrer que l'équation d'inconnue x
   $\left\{ \begin{array}{l} e^x.(\tan x) = 1 \\ x \in I_n \end{array} \right.$ admet une unique solution que l'on notera x_n, et que l'on exprimera à l'aide de g.

   (b) Comme $x_n \in I_n$, on pose $\alpha_n = x_n - n\,\pi$; on notera que $\alpha_n \in I$.
   Montrer que la suite (α_n) converge vers 0, puis déterminer un équivalent de α_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

Soit x un réel de $]0, \pi/2[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \cos x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

1. (a) Montrer que la suite de terme général $w_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.

   (b) En déduire pour tout n, la valeur de u_n en fonction de x et n.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

2. La fonction MATLAB suivante permet le calcul des n ièmes termes de deux suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ dont les premiers termes sont respectivement $a_0 = 1$ et $b_0 = \frac{1}{\cos x}$.

```
function [a,b]=suite(n,x)
a=1; b=1/cos(x);
for k=1:n,
   a=(a+b)/2;
   b=sqrt(a*b);
end
```

   (a) Vérifier que $b_1 = \frac{\cos(x/2)}{\cos x}$.

   (b) Pour $n \geq 1$, écrire les relations de récurrence liant a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

3. (a) Montrer que pour $n \geq 1$, $b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_{n-1}})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

   (c) À l'aide de 3a, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$.

   (d) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont monotones ; préciser les monotonies.

   (e) Montrer que ces deux suites sont convergentes, de limite commune L.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{u_n \cos(x/2^n)}{\cos^2(x)}$ et $b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)}$ et donner la valeur de L.