**Correction du devoir n°9**

# EXERCICE

1. Notons $A^2 = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ ; on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{k,j} = a_{i,n+1-i}\, a_{n+1-i,j} = a_{n+1-i,j}$ car $a_{i,n+1-i} = 1$ et $a_{i,k}$ est nul pour $k \neq n+1-i$. Comme de même $a_{n+1-i,j} = 0$ si $n+1-j \neq n+1-i$, il reste $b_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon ; en résumé, $A^2 = I$.
2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
   On a $A\,X = \lambda\,X$, puis $A^2\,X = A\,\lambda\,X = \lambda^2 X$ ; or $A^2 = I$ donc $A^2 X = X$. Comme $X \neq 0$, on en déduit $\lambda^2 = 1$ et par conséquent, $\lambda \in \{-1\,,\,1\}$.
   $$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1\,,\,1\}}$$
   Remarque : on ne peut pas affirmer à ce stade que 1 et $-1$ sont valeurs propres mais seulement que ce sont les seules valeurs propres possibles de $A$.
3. $A$ est diagonalisable car elle est symétrique réelle. Cette remarque permet de conclure que 1 et $-1$ sont bien tous deux valeurs propres de $A$, car sinon $A$ n'aurait qu'une seule valeur propre, 1 ou $-1$ et comme elle est diagonalisable, son unique sous-espace propre serait de dimension $n$ et on aurait $A = I$ ou $A = -I$.
4. On pose $X = (x_1, \dots, x_n)$ et on détermine les deux sous-espaces propres de $A$ :
   • Calcul du sous-espace propre associé à 1 : on résout : $x_1 = x_n,\ x_2 = x_{n-1}, \dots, x_n = x_1$.
   ⋆ Si $n$ est pair ($n = 2\,p,\ p \in \mathbb{N}^*$), on obtient deux fois les mêmes équations, donc en fait $p = \frac{n}{2}$ équations effectives, et $E_1$ est engendré par les vecteurs $\vec{e}_i + \vec{e}_{n+1-i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
   ⋆ Si $n$ est impair ($n = 2\,p+1,\ p \in \mathbb{N}$), on n'obtient que $p$ équations indépendantes puisque $x_{n+1-p} = x_p$ est toujours vérifié.
   En résumé, $E_1$ est de dimension $p = \frac{n}{2}$ si $n$ est pair et de dimension $p+1 = \frac{n+1}{2}$ si $n$ est impair ; lorsque $n$ est impair $E_1$ est engendré par le vecteur $\vec{e}_p$ et les vecteurs $\vec{e}_i + \vec{e}_{n+1-i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
   • Calcul du sous-espace propre associé à $-1$ : on résout : $x_1 = -x_n,\ x_2 = -x_{n-1}, \dots, x_n = -x_1$.
   ⋆ si $n$ est pair, on obtient comme précédemment deux fois les mêmes équations et $E_{-1}$ est de dimension $p = \frac{n}{2}$, engendré par les vecteurs $\vec{e}_i - \vec{e}_{n+1-i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
   ⋆ Si $n$ est impair la $p+1$ième équation donne $x_p = -x_p$, donc $x_p = 0$, $E_{-1}$ aussi de dimension $p = \frac{n-1}{2}$, engendré par les vecteurs $\vec{e}_i - \vec{e}_{n+1-i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

# PROBLÈME

## Première partie

1. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation, on peut donc poser $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient :
   $r^4\,e^{i\,4\,\theta} = 1\,e^{i\,0}$ d'où $r = 1$ et $\theta = 0 + \dfrac{2\,k\,\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour obtenir toutes les solutions, il suffit de choisir 4 valeurs consécutives de $k$, par exemple de 0 à 3. Finalement l'ensemble des solutions est $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.
   Remarque : on pouvait aussi écrire $z^4 = 1 \iff z^4 - 1 = 0 = (z^2-1)\,(z^2+1) = (z-1)\,(z+1)\,(z-i)\,(z+i)$.
   $$\boxed{z^4 = 1 \iff z \in \{1,\ i,\ -1,\ -i\}}$$
2. (a) $\lambda \in \mathbb{C} \in$Spec$(g)$ si et seulement si $g - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif, ou encore si $J - \lambda\,I$ est de rang inférieur ou égal à 3. Soit $\lambda \neq 0$ :
   $$J - \lambda\,I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \lambda\,L_4 + L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \lambda\,L_4 + L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda^3\end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow \lambda L_4 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4\end{pmatrix}.$$

Donc pour $\lambda \neq 0$, $J - \lambda I$ est de rang 4 (colonnes échelonnées) si et seulement si $1 - \lambda^4 \neq 0$ ; pour $\lambda = 0$ $J$ est de rang 4 (il suffit de permuter $L_1$ et $L_4$ pour retrouver la matrice $I$).
Ainsi $\mathrm{rg}(J - \lambda I) < 4 \iff \lambda \in \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$

$$\boxed{\mathrm{Spec}(J) = \mathrm{Spec}(g) = \{1,\, i,\, -1,\, -i\}}$$

(b) Pour $\lambda \in \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$ et $X = {}^t(x, y, z, t)$ on résout $(J - \lambda I)\, X = 0$

- $\underline{\lambda = 1}$ $\begin{cases} -x + y = 0\\ -y + z = 0\\ -z + t = 0\end{cases} \iff x = y = z = t$ $\qquad \boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\langle(1,1,1,1)\rangle}$
- $\underline{\lambda = i}$ $\begin{cases} -ix + y = 0\\ -iy + z = 0\\ -iz + t = 0\end{cases} \iff \begin{cases} y = ix\\ z = -x\\ t = -ix\end{cases}$ $\qquad \boxed{E_i = \mathrm{Vect}\langle(1,i,-1,-i)\rangle}$
- $\underline{\lambda = -1}$ $\begin{cases} x + y = 0\\ y + z = 0\\ z + t = 0\end{cases} \iff y = t = -x = -z$ $\qquad \boxed{E_{-1} = \mathrm{Vect}\langle(1,-1,1,-1)\rangle}$
- $\underline{\lambda = -i}$ $\begin{cases} ix + y = 0\\ iy + z = 0\\ iz + t = 0\end{cases} \iff \begin{cases} y = -ix\\ z = -x\\ t = ix\end{cases}$ $\qquad \boxed{E_{-i} = \mathrm{Vect}\langle(1,-i,-1,i)\rangle}$

(c) $g$ admet 4 valeurs propres distinctes, donc $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$

3. (a) $J^0 = I,\ J^2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, donc $M_A = \begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\a_4&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_4&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_4&a_1\end{pmatrix}$

(b) $M_A$ est combinaison linéaire de $I,\ J,\ J^2$ et $J^3$ ; or $M_A$ est la matrice de l'endomorphisme $f_A$ dans la base $\mathcal{B}$, $J$ est la matrice de $g$ dans la base $\mathcal{B}$, de même pour $J^k$, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Ainsi $f_A$ est combinaison linéaire (avec les mêmes coefficients que $M_A$) de id, $g$, $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.

(c) Notons $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4$ les vecteurs de base déterminés précédemment de $E_1,\ E_i,\ E_{-1},\ E_{-i}$ respectivement.
$g(\varepsilon_1) = g \circ g(\varepsilon_1) = g \circ g \circ g(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \quad g(\varepsilon_2) = i\,\varepsilon_2,\ g \circ g(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2,\ g \circ g \circ g(\varepsilon_2) = -i\,\varepsilon_2$
$g(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3,\ g \circ g(\varepsilon_3) = \varepsilon_3,\ g \circ g \circ g(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$ et $g(\varepsilon_4) = -i\,\varepsilon_4,\ g \circ g(\varepsilon_4) = -\varepsilon_4,\ g \circ g \circ g(\varepsilon_4) = i\,\varepsilon_4$
$f_A(\varepsilon_1) = a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,g(\varepsilon_1) + a_3\,g \circ g(\varepsilon_1) + a_4\,g \circ g \circ g(\varepsilon_1) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\,\varepsilon_1$
$f_A(\varepsilon_2) = a_1\,\varepsilon_2 + a_2\,g(\varepsilon_2) + a_3\,g \circ g(\varepsilon_2) + a_4\,g \circ g \circ g(\varepsilon_2) = (a_1 + i\,a_2 - a_3 - i\,a_4)\,\varepsilon_2$
$f_A(\varepsilon_3) = a_1\,\varepsilon_3 + a_2\,g(\varepsilon_3) + a_3\,g \circ g(\varepsilon_3) + a_4\,g \circ g \circ g(\varepsilon_3) = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)\,\varepsilon_3$
$f_A(\varepsilon_4) = a_1\,\varepsilon_4 + a_2\,g(\varepsilon_4) + a_3\,g \circ g(\varepsilon_4) + a_4\,g \circ g \circ g(\varepsilon_4) = (a_1 - i\,a_2 - a_3 + i\,a_4)\,\varepsilon_4$

(d) La famille $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)$ est une base de vecteurs propres de $g$, on constate qu'elle est aussi une base de vecteurs propres de $f_A$, les valeurs propres associées étant $a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ a_1 + i\,a_2 - a_3 - i\,a_4,\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ et $a_1 - i\,a_2 - a_3 + i\,a_4$. Dans cette base, la matrice de $f_A$ est donc semblable à

$$\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1+ia_2-a_3-ia_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_1-a_2+a_3-a_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_1-ia_2-a_3+ia_4\end{pmatrix}$$

4. (a) On remarque que $M(z) = M_A$ avec $A = \begin{pmatrix}z & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, donc d'après la question 3d, ses valeurs propres sont $z+3$ et $z-1$ ; $z-1$ est valeur propre triple.

(b) $M(z)$ est inversible si 0 n'est pas valeur propre,d'où $\boxed{M(z) \text{ est inversible } \iff z \notin \{1, -3\}}$

(c) $M(1)^2 = \begin{pmatrix}4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\end{pmatrix} = 4\,M(1)$, donc par récurrence $\forall k \geqslant 1,\ M(1)^k = 4^{k-1}\,M(1)$

$M(z)-M(1)=(z-1)\,I$, donc $\big(M(z)-M(1)\big)^k=(z-1)^k\,I$ ; et comme $M(z)-M(1)$ et $M(1)$ commutent, on déduit :

$$[M(z)]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M(1)^k\left(M(z)-M(1)\right)^{n-k}=I\times\left(M(z)-M(1)\right)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}\,M(1)\,(z-1)^{n-k}\,I$$

$$=(z-1)^n\,I+\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k\,(z-1)^{n-k}\right)M(1)=(z-1)^n\,I+\frac{1}{4}\Big((z+3)^n-(z-1)^n\Big)\,M(1)$$

$$\boxed{[M(z)]^n=\frac{(z+3)^n}{4}\,M(1)+(z-1)^n\Big(I-\frac{1}{4}\,M(1)\Big)}$$

5. Algorithmes en Python :

(a)

```python
import numpy as np
def Produit(A,B):
    lignesA=4
    colonnesB=4
    taille=4
    C=np.zeros(shape=[lignesA,colonnesB])
    for l in range(lignesA):
        for c in range(colonnesB):
            for i in range(taille):
                C[l,c]+=A[l,i]*B[i,c]
    return C
```

Pour chaque coefficient du produit (16 en tout) il faut 4 produits et 3 additions, soit au total 48 additions et 64 produits.

(b)

```python
def Puissance(A,n):
    Taille=4
    B=np.eye(Taille,Taille)
    for k in range(n):
        B=Produit(A,B)
    return B
```

On effectue $n-1$ produits matriciels, soit $48\,n$ additions et $64\,n$ produits.

(c)

```python
def PuissanceZ(z,n):
    Taille=4
    I=np.eye(Taille,Taille)
    M1=np.ones([Taille,Taille])
    return (0.25*(z+3)**n)*M1+((z-1)**n)*(I-0.25*M1)
```

On a une somme (donc une addition) de deux expressions :
Pour la partie gauche : une addition $(z+3)$ puis $n$ produits (puissance $n$ et produit par $0,25$) et enfin 16 produits (multiplication par les coefficients de $M(1)$).
Pour la partie droite : 16 produits ($-0,25$ par les coefficients de $M(1)$), 16 additions (somme des deux matrices), puis 1 addition $(z-1)$ et $16+(n-1)$ produits.
Donc au total, 19 additions et $2\,n+47$ produits.

## Deuxième partie

1. Soit $P$ un élément de $E$, c'est à dire une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3, $x \longmapsto P'(0) - \dfrac{P'''(0)}{6} + x\left(\dfrac{P''(0)}{2} - P(0)\right)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1, donc $h(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3, et $h$ est bien à valeurs dans $E$.
   Linéarité de $h$ : Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\lambda\, P + Q)(x) = (1-x^2)\left((\lambda\, P+Q)'(0) - \dfrac{\lambda\, P + Q)'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{(\lambda\, P+Q)''(0)}{2} - (\lambda\, P+Q)(0)\Big)\right)$
   $= \lambda\,(1-x^2)\left(P'(0) - \dfrac{P'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{P''(0)}{2} - P(0)\Big)\right) + (1-x^2)\left(Q'(0) - \dfrac{Q'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{Q''(0)}{2} - Q(0)\Big)\right)$
   $= \lambda\, h(P)(x) + h(Q)(x)$ ; l'égalité est vérifiée pour tout $x$ réel, donc $h$ est linéaire.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_0)(x) = -x\,(1-x^2)$ donc $h(\varepsilon_0) = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_1)(x) = (1-x^2)$ donc $h(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \varepsilon_2$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_2)(x) = x\,(1-x^2)$ donc $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_3)(x) = -\,(1-x^2)$ donc $h(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 - \varepsilon_0$ ce qui donne pour la matrice de $h$ dans $\mathcal{B}_1$ :
   $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. On remarque que $H$ est de rang 2, puisque les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, ainsi que les colonnes 2 et 4 ; ainsi 0 est valeur propre avec un espace propre associé de dimension 2 : $\ker(h) = \mathrm{Vect}\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_4\rangle$
   Pour $\lambda \neq 0$, on calcule le rang de $H - \lambda\, I$ :
   $$H - \lambda\, I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \lambda\, L_1}}{\sim}$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda\, L_2 \\ L_4 \leftarrow L_2 + L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow \lambda\, L_4 + 2\, L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^3 - 4\lambda \end{pmatrix}$$
   $-\lambda^3 - A\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 + 4)$ On constate que pour $\lambda \neq 0$, la matrice est de rang 4, donc il n'y a pas d'autre valeur propre réelle que 0. *Par contre il y a aussi deux valeurs propres complexes conjuguées : $2\,i$ et $-2\,i$.*
4. Une base du noyau a déjà été trouvée à la question précédente : $\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4\rangle$ ; pour une base de l'image –qui est de dimension 2– il suffit de considérer deux vecteurs colonnes non colinéaires de $H$, par exemple $h(\varepsilon_1) = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4$ et $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$.
   $$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vect}\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4\rangle \\ \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\langle -\varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3\rangle \end{array}}$$
   Ce n'est pas demandé dans l'exercice, mais on peut alors écrire la matrice $H'$ de $h$ dans la base
   $\mathcal{B}' = \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ -\varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3\rangle$ : $H' = \mathscr{M}at(h, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$