Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

Correction du DM N°12

« Aléa Géométrique N - Maximum de N variables aléatoires Exponentielles indépendantes »

---

1. (a) $a \geqslant 0$ donc la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{e^u + a}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\forall u \geqslant 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{e^u+a} \leqslant \dfrac{1}{e^u}$

   De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}du$ est une intégrale convergente égale à 1 *(c'est du cours car on reconnait l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1).*

   On peut donc appliquer le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives pour conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u+a}du \text{ est une intégrale convergente}}$$

   (b) Tout d'abord, si $a = 0$, alors $J = 1$ d'après la question précédente ; et si $a > 0$:

   $a\,J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{e^u+a}du$ et $\displaystyle\int_0^A \frac{a}{e^u+a}du = \int_0^A \left(1 - \frac{e^u}{e^u+a}\right)du = \Big[u - \ln(a+e^u)\Big]_0^A$

   Or $\Big[u - \ln(a+e^u)\Big]_0^A = A - \ln\left(a+e^A\right) + \ln(a+1) = \ln(e^A) - \ln\left(a+e^A\right) + \ln(a+1)$

$$= -\ln\left(1 + a\,e^{-A}\right) + \ln(a+1) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(a+1) \text{ donc}$$

$$\boxed{J = \frac{\ln(a+1)}{a} \text{ si } a>0 \text{ et } 1 \text{ si } a=0}$$

2. $[Z \leqslant t \cap N = j] = \left[\big(\max(Y_1,\dots,Y_j) \leqslant t\big) \cap (N=j)\right] = \left[(Y_1 \leqslant t) \cap \dots \cap (Y_j \leqslant t) \cap (N=j)\right]$ et comme N et les variables Y_k sont indépendantes, $P_{[N=j]}(Z \leqslant t) = P\Big((Y_1 \leqslant t) \cap \dots \cap (Y_j \leqslant t)\Big) = \displaystyle\prod_{k=1}^{j} P(Y_k \leqslant t) = \prod_{k=1}^{j} F_X(t)$ où F_X est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre b, commune à toutes les variables Y_k.

$$\boxed{P_{N=j}(Z \leqslant t) = \left(1 - e^{-bt}\right)^j}$$

3. (a) Par la formule des probabilités totales, on a :

   Soit $t \geqslant 0,\ P(Z \leqslant t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P_{[N=j]}(Z \leqslant t)\,P(N=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (1-\mathrm{e}^{-b\,t})^j\, s\,(1-s)^{j-1} =$

   $s\,(1-\mathrm{e}^{-b\,t})\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\Big((1-\mathrm{e}^{-b\,t})\,(1-s)\Big)^{j-1} = \frac{s\,(1-\mathrm{e}^{-b\,t})}{1-(1-\mathrm{e}^{-b\,t})\,(1-s)} = 1 - \frac{1}{s\,\mathrm{e}^{bt} - s + 1}$ après simplification.

$$\boxed{F_Z(t) = 0 \text{ pour } t<0 \text{ et } F_Z(t) = 1 - \frac{1}{s\,\mathrm{e}^{bt}-s+1} \text{ pour } t \geqslant 0}$$

   (b) Si on note f_Z une densité de Z, on a par exemple f_Z nulle pour $t<0$ et sinon, $f_Z(t) = \dfrac{s\,b\,\mathrm{e}^{bt}}{(s\,\mathrm{e}^{bt}-s+1)^2}$

$$\boxed{f_Z(t) = 0 \text{ pour } t<0 \text{ et } f_Z(t) = \frac{s\,b\,\mathrm{e}^{bt}}{(s\,\mathrm{e}^{bt}-s+1)^2} \text{ pour } t \geqslant 0}$$

4. Sous réserve d'existence, $E(Z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\,f_Z(t)\,\mathrm{d}t.$ Soit $A>0$,

   $\displaystyle\int_0^A t\,f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\,F_Z(t)\Big]_0^A - \int_0^A F_Z(t)\,\mathrm{d}t = A\,F_Z(x) - \int_0^A\left(1 - \frac{1}{s\,\mathrm{e}^{bt}-s+1}\right)\mathrm{d}t = A\left(F_Z(A)-1\right) + \frac{1}{s}\int_0^A \frac{1}{\mathrm{e}^{bt}+\frac{1-s}{s}}\,\mathrm{d}t$

   $A\left(F_Z(A)-1\right) = \dfrac{A}{s\,\mathrm{e}^{bA}-s+1}$ tend vers 0 lorsque $A \to +\infty$ et, en prenant $a = \dfrac{1-s}{s}$, par le changement de variable $u = b\,t$, on obtient $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{\mathrm{e}^{bt}+\frac{1-s}{s}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b}\,J = \frac{-\ln s}{b\,(1-s)}$. Par conséquent :

$$\boxed{E(Z) \text{ existe et vaut } \frac{-\ln s}{b\,(1-s)}}$$

5. (a) $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$ donc il existe $B>0$ tel que $\forall t\geqslant B,\ |g(t)|\leqslant 1$, par conséquent g est bornée sur $[B,+\infty[$; d'autre part, $1-\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t)=1$, ainsi g est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}^+$, et en particulier sur le segment $[0,B]$. En tant que fonction continue sur un segment, g est bornée sur $[0,B]$, et par suite, bornée sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) L'égalité est évidente pour $t=0$ et, pour $t>0$, on a : $t\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-kt}=t\,\dfrac{1-\mathrm{e}^{(n+1)\,t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}=g(t)\ \mathrm{e}^{t}\ \left(1-\mathrm{e}^{-(n+1)\,t}\right)$, d'où l'égalité annoncée en multipliant les deux membres par e^{-t}.

6. Soit $A>0$, $\displaystyle\int_0^A t\ \mathrm{e}^{-(k+1)\,t}\ \mathrm{d}\,t=\left[\frac{-t\ \mathrm{e}^{-(k+1)\,t}}{k+1}\right]_0^A+\int_0^A\frac{\mathrm{e}^{-(k+1)\,t}}{k+1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\mathrm{e}^{-(k+1)\,A}}{k+1}+\frac{1-\mathrm{e}^{-(k+1)\,A}}{(k+1)^2}$

   donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \mathrm{e}^{-(k+1)\,t}\ \mathrm{d}\,t=\lim_{A\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(k+1)\,A}}{k+1}+\frac{1-\mathrm{e}^{-(k+1)\,A}}{(k+1)^2}=\frac{1}{(k+1)^2}.$

   Remarque : on pouvait aussi reconnaître le produit de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $k+1$ *par* $\dfrac{1}{k+1}$.

7. Soit $A>0$. g est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ 0\leqslant g(t)\leqslant M$;

   $\displaystyle 0\leqslant\int_0^A g(t)\ \mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t\leqslant M\int_0^A \mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

   De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle 0\leqslant\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{n+1}$, ainsi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t=0.$

   $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge comme somme d'intégrales qui le sont et

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=0+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} t\ \mathrm{e}^{-(k+1)\,t}\ \mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

   .

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$$

8. $\displaystyle\int_0^1 E(Z)\,\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{-\ln s}{b\,(1-s)}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{b}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{-\ln s}{(1-s)}\,\mathrm{d}s.$

   Par le changement de variable, $s=\mathrm{e}^{-t}$, on obtient $\displaystyle\frac{1}{b}\int_0^{-\ln\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t$, d'où $\displaystyle\int_0^1 E(Z)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{b}\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6\,b}$

$$\boxed{\int_0^1 E(Z)\,\mathrm{d}s=\frac{\pi^2}{6\,b}}$$