Intégrales généralisées

1. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes. En cas de convergence, calculer l'intégrale.

$a)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\mathrm{d}t$ $\quad b)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t$ $\quad c)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$

$d)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$ $\quad e)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$ $\quad f)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t$

2. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes.

$a)\ \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ $\quad b)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+\ln(t)}\mathrm{d}t$ $\quad c)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\cos(t)}-\mathrm{e}}{t^2}\mathrm{d}t$

$d)\ \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ $\quad e)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t$ $\quad f)\ \displaystyle\int_0^{1} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$

$g)\ \displaystyle\int_0^{1} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ $\quad h)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ $\quad i)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.
   (b) On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$. Que dire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$?
4. On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.
   (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) i. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{k+1}$.
   ii. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$.
   iii. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t$ est divergente.
5. On pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$. Démontrer que $B(x,y)$ existe si et seulement si $x>0$ et $y>0$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est une intégrale généralisée convergente.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner un lien entre I_n et I_{n+1}.
   (c) En déduire une expression de I_n en fonction de n.
7. (a) Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   (b) Calculer la valeur de cette intégrale en utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
8. $\forall x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, l'intégrale définissant $f(x)$ existe.
   (b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (d) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   (a) Démontrer que l'intégrale généralisée $\Phi(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Etablir que la fonction Φ est impaire.
   (c) Calculer $\Phi(0)$.