2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 Vendredi 4 mars 2016

Variables aléatoires à densité
Lois usuelles

1. Au pays des 7 nains, ne circulent que des petites voitures rouges et des petites voitures vertes.
   Le temps d'attente R d'une voiture rouge suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
   Le temps d'attente V d'une voiture verte suit la loi $\mathscr{E}(\mu)$.
   On suppose que les variables aléatoires R et V sont indépendantes.
   On note X le temps d'attente d'une voiture.
   (a) Exprimer X en fonction de R et V.
   (b) Déterminer la fonction de répartition X.
   (c) Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance et sa variance ?
2. (a) Soit X une VAR suivant une loi $\mathscr{N}(0,1)$. Déterminer t de sorte que $P(-t < X < t) = 0,95$.
   (b) Soit X une VAR suivant une loi $\mathscr{N}(8,4)$. Calculer :

   a) $P(X < 7,5)$ *b)* $P(X > 8,5)$ *c)* $P(6,5 < X < 10)$

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que la variable $Z = 1 - X$ suit la même loi que X.
   (b) Soit λ un réel strictement positif. On considère la variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ par :
   $$Y = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\ln(X) & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   i. Déterminer une densité de Y.
   ii. Calculer l'espérance et la variance de Y.
   (c) On étudie maintenant la réciproque. Soit λ un réel strictement positif. On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $\mathbb{R}_+$, et on envisage la variable aléatoire X définie par $X = e^{-\lambda Y}$. Déterminer la loi de X.
4. Soient X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
5. La taille Y d'une plante suit, en conditions naturelles, une loi uniforme sur l'intervalle $[3,8]$. Dans une pépinière à la fin de la croissance naturelle, si sa taille est inférieure à 4, on lui met un produit chimique qui fait doubler sa taille. Si sa taille est supérieure à 4, on ne fait rien. On note X sa taille finale. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance de X.
6. Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathscr{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![-1,1]\!]$. On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
   (a) Déterminer la loi de la variable $Z = XY$.
   (b) A-t-on affaire à une variable aléatoire à densité ?
7. N clients d'une boîte de nuit arrivent entre minuit et une heure du matin. Les instants d'arrivées $X_1, \ldots, X_N$ des clients sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme.
   (a) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Calculer la probabilité $P(X_i \leqslant x)$.
   (b) On note G_t la variable aléatoire décrivant le nombre de personnes arrivant avant le moment t. Donner la loi de la variable aléatoire G_t.
   (c) On note Y_r l'instant d'arrivée du r-ième client. Montrer que :
   $$P(Y_r \leqslant t) = \sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k}$$
   (d) Montrer que Y_r est une variable aléatoire à densité.
8. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi normale centrée réduite.
   (a) Calculer, si elle existe, l'espérance de $Y = \mathrm{e}^X$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer, si elle existe, l'espérance de $Z = \mathrm{e}^{aX}$.

9. Soit X une variable aléatoire réelle.

   (a) Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$. Montrer l'équivalence :

   $$X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$$

   (b) Soient $\lambda > 0$ et $Y = \lambda X$. Montrer l'équivalence :

   $$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$$

   (c) Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ et $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$. Montrer l'équivalence :

   $$X \hookrightarrow \mathscr{N}(m,\sigma) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$$

10. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la recherche des valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 2a & 1 \\ -4 & a \end{bmatrix}$ revient à la résolution de l'équation du second degré $\lambda^2 - 3a\lambda + 4 + 2a^2 = 0$.

   (b) Soient X une VAR suivant une loi normale $\mathscr{N}(0,4)$ et $M = \begin{bmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{bmatrix}$

      i. Calculer la probabilité que M possède deux valeurs propres réelles distinctes.

      ii. Calculer la probabilité que M possède deux valeurs propres complexes non réelles.

      iii. Calculer la probabilité que M possède des valeurs propres imaginaires pures.