2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Variables aléatoires discrètes

Mercredi 2 décembre 2015

1. On effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge dans les conditions suivantes :
   ▹ Si on tire la boule rouge, le jeu s'arrête.
   ▹ Si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche.
   On note X le rang d'apparition de la boule rouge.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = n)$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)$.
   (b) La variable X admet-elle une espérance ?
2. Un joueur lance une fléchette au hasard sur une cible circulaire de rayon 1 et divisée en couronnes concentriques par les cercles de rayons $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$. On admet que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle à son aire. Si la fléchette touche la cible dans la couronne limitée par les cercles de rayons $\frac{i}{n}$ et $\frac{i+1}{n}$, ($i \in [\![0, n-1]\!]$), le joueur touche $n - i$ Euros. On désigne par X le gain du joueur.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
3. Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées $1, 2, \ldots, n \ldots$ Pour tout $n > 0$, la probabilité de franchir la n^{e} hauteur sachant que les précédentes ont été franchies vaut $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.
   (a) Calculer la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
4. On effectue des lancers successifs d'une pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$.
   (a) On dit que la première série est de longueur $L_1 = n$ si les n premiers lancers donnent une face et le $(n + 1)^{\text{ième}}$ donne l'autre face. Déterminer la loi de L_1 et calculer $E(L_1)$.
   (b) On appelle X_2 le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux pile. Déterminer la loi de X_2 et calculer $E(X_2)$.
5. Deux boîtes marquées respectivement A et B contiennent chacune 2 jetons, l'un portant le numéro 0, l'autre le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence n fois cette opération. Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons de la boîte A à l'issue du $\text{n}^{\text{ième}}$ échange ($X_0 = 1$).
   (a) Déterminer, pour tout $n \geqslant 0$, l'ensemble $X_n(\Omega)$.
   (b) Pour tout $i \in X_n(\Omega)$, exprimer $P(X_n = i)$ en fonction de probabilités faisant intervenir X_{n-1}.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in X_n(\Omega)$, déterminer une expression de $P(X_n = i)$ en fonction de n.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $E(X_n)$.
6. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et des boules noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2 et n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard, et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine. Si l'on obtient une boule blanche, le $2^{\text{ième}}$ tirage se fait dans U_1, et dans le cas contraire, il se fait dans U_2. Au $\text{i}^{\text{ième}}$ tirage, si la boule obtenue est blanche, le $(\text{i+1})^{\text{ième}}$ tirage se fait dans U_1, sinon, il se fait dans U_2. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement :

   B_i : « On obtient une boule blanche au $\text{i}^{\text{ième}}$ tirage »

   (a) Calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, exprimer $P(B_n)$ en fonction de $P(B_{n-1})$.
   (c) En déduire une expression de $P(B_n)$ en fonction de n et étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n)$.
   (d) Soit X_n le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages. Calculer $E(X_n)$. *(on pourra considérer la variable aléatoire Y_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) qui vaut 1 si on obtient une boule blanche au k^{e} tirage et 0 sinon).*
7. Soit X une variable aléatoire réelle telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\exists a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{a}{k\,(k+1)\,(k+2)}$
   (a) Déterminer a.
   (b) La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
   (c) La variable X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.