Rapport Méthodes de calcul et raisonnement 2015

L'épreuve proposait l'étude et l'utilisation de la fonction arcsinus ce qui permettait de balayer de nombreux points du programme en probabilité, analyse et algèbre linéaire et de vérifier leur acquisition ou non. La variété des thèmes abordés et la progressivité des questions permettaient aux candidats de ne pas rester coincés. Quelques copies ont couvert une bonne partie du problème. À l'exception de la dernière question, toutes les questions ont été traitées.

Le jury regrette que les questions de cours (énoncé de théorèmes du cours comme celui de la bijection ou de Bienaymé-Tchebychev, connaissance des DL de base, définition d'une variable à densité, trigonométrie, condition suffisante de diagonalisation...) n'aient pas été correctement traitées par la plupart des candidats. Il est dommage que les étudiants ne citent pas les hypothèses nécessaires à la validité des théorèmes cités.

Si les bonnes habitudes de présentation semblent toujours en application chez la plupart des candidats, le nombre de copies peu, voire pas du tout, soignées est en augmentation. Certaines copies sont à la limite de la lisibilité, avec nombre de questions barrées, des résultats qui ne sont pas mis en valeur, ainsi qu'une orthographe et des constructions syntaxiques parfois fantaisistes. De manière générale, nous ne saurions que trop conseiller aux futurs candidats d'éviter de barrer des morceaux de question, sans faire apparaître très clairement ce qui est faux et ce qui est juste (ou présumé tel). Rappelons également que, en particulier lorsque les questions ne sont pas traitées dans l'ordre, il est indispensable de recopier intégralement le numéro des questions (par exemple II.6.a et pas simplement a).

Signalons aussi qu'il est inutile d'expliquer «ce qu'il aurait fallu faire» sans le faire : les candidats sont évalués sur leurs capacités à mener à bien des calculs et des raisonnements, et par conséquent, le jury attend une démonstration de ces capacités.

Enfin, il est important de savoir se raccrocher aux indications fournies par l'énoncé et d'en profiter pour contrôler ses résultats : lorsqu'une densité de X est donnée à la question II.2, il faut savoir en profiter pour vérifier (par intégration) que la fonction de répartition obtenue à la question précédente est bien la bonne. De même, la remarque à la fin de la question III.1 aurait dû permettre de déceler des erreurs grossières.

Pour finir, le jury déplore le manque de réflexion sur certaines questions où nombre de candidats croient reconnaître une question calculatoire typique et se lancent dans des calculs qui n'ont aucune chance d'aboutir. La connaissance, aussi bonne soit-elle, des techniques de calcul de base ne dispense jamais de réfléchir. A titre d'exemple, citons la question III.2.b où certains candidats reconnaissent, à x fixé, une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et cherchent alors à déduire la forme générale de via le polynôme caractéristique, la question II.5.c qui ressemble à un intervalle de confiance de l'espérance (mais qui ne l'est pas), ou la question III.4.b qui ne demande non pas de résoudre une équation différentielle mais uniquement de vérifier que en est solution. Dans ces trois cas, une lecture attentive de l'énoncé et une rapide réflexion avant de démarrer des calculs (qui n'aboutissent pas) auraient probablement permis à nombre de candidats de gagner du temps (quitte à passer la question et consacrer le temps ainsi économisé aux questions suivantes).

Partie I

Cette partie introduisait la fonction arcsinus et en établissait les principales propriétés. Beaucoup de candidats ont reconnu la fonction arcsinus (qui n'était pourtant plus au programme cette année) et ont été déroutés par les questions en lesquelles ils n'ont vu que de simples questions de cours et n'ont pas pris la peine de justifier leurs résultats, bien que la formulation des questions fut très claire.

I.1 La plupart des candidats reconnaissent le théorème de la bijection, mais les hypothèses n'en sont pas toujours connues, et il n'est pas rare de lire «f' est positive sur $]-\pi/,\pi/2[$ donc f y est strictement croissante».

I.2 Les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques sont connues d'une grande majorité des candidats, et la notion de bijection réciproque semble intuitive pour la plupart (même ceux qui auraient montré à la question précédente des difficultés avec la notion de bijection).

I.3 Si beaucoup de copies présentent une ébauche de graphe dont l'allure est globalement satisfaisante, nombre de dessins manquent de soins, ou se contentent de placer trois points et de les relier à la règle. Moins d'un quart des copies mentionnent le lien de symétrie entre la courbe de A et celle de sinus. Plus grave : parmi ces copies, on constate souvent des difficultés à réaliser une symétrie par rapport à la première bissectrice, la notion de repère orthonormé n'est pas toujours acquise. En particulier, il ne semble pas évident pour tout le monde que le point de coordonnées $(1,\pi/2)$ ne se trouve pas sur la première bissectrice.

I.4 Si la relation $\cos^2+\sin^2=1$ semble connue et assimilée par la moitié des candidats, peu d'entre eux ont le réflexe de vérifier qu'un nombre est positif avant d'affirmer qu'il est égal à la racine de son carré.

I.5 La difficulté de cette question résidait surtout dans le fait de prouver (ou plutôt de mentionner, car il s'agit là d'un théorème du cours) que A est dérivable là où $cos(A(x))$ ne s'annule pas, et peu de candidats se souviennent de cette partie d'un théorème appris en première année, dont ils ont essentiellement retenu la formule donnant la dérivée de A. Environ un quart des candidats ont pensé à dériver la question précédente pour trouver A', ce qui ne permettait toutefois pas de prouver que A est dérivable.

I.6.a Il s'agissait là d'une question de cours, pour laquelle on ne demandait aucune justification. Pour autant, elle n'est correctement traitée que dans la moitié des copies. Certains candidats n'aboutissent pas car ils commencent par le DL de $\sqrt{1+t}$ qu'ils cherchent ensuite à inverser.

I.6.b Bien que sans difficulté calculatoire, cette question demandait un peu d'aisance dans la manipulation des développements limités, en particulier lors de l'intégration du développement limité de A', où la constante d'intégration passe trop souvent à la trappe (bien qu'elle fût nulle ici). Quelques candidats courageux utilisent avec succès la formule de Taylor-Young pour obtenir le résultat. D'autres n'hésitent pas à trafiquer le résultat de la question précédente pour obtenir le résultat attendu à l'aide de deux erreurs de calcul. Ce type de comportements est à proscrire.

Partie II

Cette partie introduisait une loi de probabilités à densité et en étudiait les principales caractéristiques.

II.1 Si la définition de la fonction de répartition ne pose pas de problèmes particuliers, la manipulation des inégalités semble moins intuitive et seules un quart des copies mentionnent la croissance de sinus (ou de A). Les candidats ayant pensé à commencer par déterminer le support de X arrivent à justifier correctement les valeurs de $F_X(x)$ pour $x \notin [0,1]$.

II.2 La définition de variable à densité n'est que rarement bien comprise et donne lieu à beaucoup d'erreurs. Même parmi les candidats connaissant la définition, rares sont ceux qui vérifient réellement que F_X est continue, ou qui remarquent qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ (qui ne coûte pourtant pas beaucoup plus cher que la phrase fourre-tout « F_X est $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en un nombre fini de points»). Enfin, parmi ceux qui arrivent à passer au travers de tous ces obstacles, certains n'ont pas de scrupules à dériver F_X en 0 et en 1 pour obtenir les valeurs correspondantes de la densité.

II.3 La partie de cette question qui a posé le plus de problème est de très loin la convergence de l'intégrale définissant l'espérance, non pas en raison de difficultés calculatoires, mais car peu de candidats ont réalisé qu'il s'agissait d'une intégrale impropre (et alors le plus souvent en établir la convergence n'a été qu'une formalité). En revanche, le jury a été agréablement surpris de constater que nombre de candidats savaient trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$ Quelques copies mentionnent le théorème de transfert, qui était ici plus simple car il n'y avait alors pas de réel problème à établir la convergence de l'intégrale, qui était faussement impropre en 0 et en 1. Trouver une espérance négative ou strictement supérieure à 1 devrait amener les candidats à s'interroger.

II.4 Le changement de variables pour les intégrales impropres ne semble pas acquis pour beaucoup de candidats. Il n'est que très exceptionnellement justifié correctement. Le plus souvent, c'est l'hypothèse de stricte monotonie qui est oubliée. De plus, dans nombre de copies, la convergence de l'intégrale obtenue après changement de variable n'est pas démontrée, ni même évoquée. Enfin, la linéarisation de $\sin^2$ puis le calcul de l'intégrale ajoutait une difficulté calculatoire à cette question, l'utilisation de la trigonométrie n'étant pas acquise.

II.5. Si la question a) était très classique, les justifications en sont trop souvent fantaisistes (linéarité de l'espérance justifiée par l'indépendance par exemple). On constate que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas connue par la moitié des candidats, et seul un candidat sur six est capable d'en citer entièrement les hypothèses. Les inégalités étant souvent dans le mauvais sens, il semble que la signification de ce résultat n'ait pas été comprise des étudiants. La question c) demandait une certaine aisance technique dans les manipulations d'inégalités, et a donné lieu à nombre de bêtises. De nombreux candidats, croyant reconnaître un intervalle de confiance de l'espérance, ont essayé de faire apparaître les quantiles de la loi normale centrée réduite (le fameux 1.96 !).

II.6 Cette question n'a pas été très souvent abordée en profondeur, et demandait une certaine aisance calculatoire, en particulier dans la manipulation des développements limités et des équivalents. Remarquons tout de même que les candidats ayant sérieusement attaqué les questions II.6.a et II.6.b.iv ont souvent su aller jusqu'au bout, et n'ont que rarement été tentés d'ajouter des équivalents. Il est tout de même déplorable que le développement limité à l'ordre 2 de cosinus en 0, question de cours ultra-classique, ne soit juste que dans moins de deux tiers des copies.

Partie III : Étude d'une suite de fonctions

Cette partie étudiant certains polynôme de Tchebychev ne comportait que des questions d'analyse, et est celle qui a le moins souvent été abordée, probablement par manque de temps, mais aussi car nombre de candidats ont préféré se concentrer sur l'algèbre linéaire de la partie IV et ses calculs rassurants.

III.1. Si l'on a pu lire à quelques reprises «$\cos(0) = 0$», la détermination de f_0 ne pose généralement pas de soucis. En revanche, l'utilisation des formules de duplication donne lieu à de nombreuses erreurs de calculs. Rappelons aux futurs candidats que la suite de l'énoncé permet parfois de détecter une éventuelle erreur de calcul, et qu'il ne faut alors pas hésiter à se servir des indications ainsi données. Ainsi, lorsqu'à la fin de la question il est écrit noir sur blanc (ou presque) «on vérifiera que f_1 est un polynôme de degré 2», il est consternant de voir quelques copies continuer d'affirmer que $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et utiliser ce résultat dans tout le reste de la partie.

III.2 De manière surprenante, la question III.2.a est la question la mieux traitée du problème (même s'il est vrai qu'il s'agit d'un résultat classique). En revanche, il était plus difficile de reconnaître les valeurs de a et b à prendre pour se servir de ce résultat dans la question III.2.b.

Rappelons également qu'une question commençant par «Montrer que pour tout entier naturel n» n'implique pas nécessairement une récurrence, et qu'il est inutile de démarrer une récurrence si l'on n'a pas la moindre idée de comment sera prouvée l'hérédité.

III.3 Ici il s'agissait bien de faire une récurrence. La difficulté était de remarquer que la forme de la relation obtenue à la question précédente nécessitait une récurrence à deux pas (et donc une initialisation double ainsi qu'une hypothèse de récurrence portant sur le rang n et le rang $n-1$). Si l'on pourrait (notez l'emploi du conditionnel !) presque pardonner aux candidats qui ne supposent la propriété vérifiée qu'au rang n, les candidats qui supposent la propriété vraie au rang n et au rang $n+2$ afin de prouver qu'elle est vraie au rang $n+1$ montrent un manque total de compréhension du principe de récurrence. Au final environ 15% des candidats arrivent à faire correctement la récurrence.

III.4 Si le calcul de la dérivée première est souvent correct, celui de la dérivée seconde donne plus souvent lieu à des erreurs. La question III.4.b était triviale si l'on avait réussi ces calculs, et infaisable sans bluffer sinon (ce qui malheureusement ne dissuade pas tout le monde). Ces tentatives d'endormissements du jury en multipliant les lignes de calculs en partant d'un résultat faux mais en aboutissant au résultat demandé sont sanctionnées.

Partie IV : Étude d'un endomorphisme

Cette dernière partie étudiait un endomorphisme d'un espace de polynômes. Les calculs de valeurs propres et de vecteurs propres ont été salutaires pour un certain nombre de candidats qui ont ainsi l'occasion de prouver qu'ils disposent d'une certaine maîtrise des techniques calculatoires usuelles.

IV.1 Si les arguments de degré sont souvent justes, près d'un tiers des candidats abordant cette question pensent qu'un élément de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ est nécessairement de degré **égal** à $2n+1$, et non **inférieur ou égal**. Une fois encore, les candidats confondant vitesse et précipitation n'ont pas manqué de s'illustrer : la première question d'un énoncé d'algèbre linéaire peut tout à fait comporter le mot «endomorphisme» sans que l'objet de la question soit de montrer que telle ou telle application en est un. En l'occurrence, une lecture attentive de l'énoncé montre ici qu'il n'était absolument pas nécessaire de prouver que Φ était bien linéaire.

IV.2 La principale erreur rencontrée dans cette question concernait la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, que de trop nombreux candidats pensent égale à 3, obtenant ainsi une matrice 3x3 et non 4x4, erreur qui portait à conséquence pour la suite de la question. Pour d'autres la base canonique est P, P' ... ce qui est regrettable. L'obtention de la matrice est relativement bien traitée mais on note de grandes confusions entre matrice triangulaire, diagonale et diagonalisable (rappelons qu'il existe des matrices triangulaires qui ne sont pas diagonalisables). Il était dommage ici (bien que ce soit juste) d'avoir besoin de trouver la base de vecteurs propres pour affirmer que M était bien diagonalisable.

IV.3 à IV.5 Ces dernières questions sont plus rarement abordées, et probablement un peu plus abstraites que les questions usuellement posées en BCPST (matrice de taille $2n+2$ avec n quelconque). Cela n'empêche pas les candidats ayant réussi la question IV.2 de répondre au moins partiellement aux questions IV.3 et IV.4. En revanche la question IV.5 n'a été abordée que par une infime minorité de candidats, et nécessitait d'avoir trouvé les valeurs propres de Φ (pour affirmer que les sous-espaces propres étaient tous de dimension un) et de faire le lien avec la question III.4 (qui fournissait un vecteur propre de Φ).

Conclusion

Pour finir, nous rappelons que la rédaction, l'orthographe et la présentation sont pris en compte, que l'honnêteté intellectuelle est une qualité appréciée par les correcteurs et insistons sur la nécessité de la maîtrise du cours.