2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Séries numériques

Mercredi 14 octobre 2015

1. (a) Considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \end{cases}$.

   Calculer sa dérivée puis simplifier l'écriture de $f_n'(x)$.

   (b) En déduire : $\forall x \in [0,1]\,, \left| \ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$

   (c) Puis : $\forall x \in [0,1]\,, \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k$.

   (d) Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Étudier la convergence (et éventuellement la somme) des séries $\sum u_n$ suivantes :

   (a) $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \geqslant 2$.

   (b) $u_n = \dfrac{3\,n+4}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geqslant 1$ *(commencer par écrire u_n sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$).*

   (c) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geqslant 2$ *(on pourra étudier les sommes partielles d'ordre pair et impair).*

3. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum u_n$ converge.

   (a) Quelle est la nature de la série $\sum u_n^2$?

   (b) La réciproque est-elle vraie ?

4. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ suivantes.

   a) $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ *b)* $u_n = \text{Arctan}\left(\dfrac{n}{\pi^n}\right)$ *c)* $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

   d) $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *e)* $u_n = e^{-n^2}$ *f)* $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$

   g) $u_n = \dfrac{n^2 \cos^3(n)}{\sqrt{n} + 2^n}$

5. Que dire du nombre $x = 0,9999999....$?

6. Montrer la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes puis calculer leurs sommes.

   a) $u_n = \dfrac{1}{\left(3+(-1)^n\right)^n}$ *b)* $u_n = \dfrac{\sin^2(n)}{3^n}$ *(Noter que $\cos(x) = \text{Re}\left(e^{ix}\right)$)* *c)* $u_n = n^2\, 5^{-n}$

7. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles positives telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

   (a) Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_0$, $\dfrac{1}{2}\, b_n \leqslant a_n \leqslant \dfrac{3}{2}\, b_n$.
   (on pourra écrire que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ puis traduire cette égalité grâce à la définition).

   (b) En déduire que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

   (c) Application : étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{4^n - 3^n + n}}$.

8. On s'intéresse dans cet exercice aux deux suites (S_n) et $(S_n^{'})$ définies pour $n \geqslant 2$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2\ln(2)} + \ldots + \frac{1}{n\ln(n)} \qquad\qquad S_n^{'} = 1 + \frac{\ln(2)}{2} + \ldots + \frac{\ln(n)}{n}$$

   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

   (b) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)} dx \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.

   (c) En déduire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$.

   (d) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

   (e) Par le même raisonnement, montrer que $S_n^{'} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\big(\ln(n)\big)^2$ et déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n}$.

9. (a) Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant n+1$. Montrer que $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{1}{(k-1)!}$ puis que $\dfrac{1}{k!} \leqslant \Big(\dfrac{1}{n+1}\Big)^{k-n} \dfrac{1}{n!}$.

   (c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant n+1$; établir que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n.n!}\Big[1 - \big(\frac{1}{n+1}\big)^{N-n}\Big]$.

   (d) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n.n!}$.

10. Étudier la suite (p_n) définie pour $n \geqslant 0$ par : $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \big(1 + \frac{1}{2^k}\big)$.

11. Soit (a_n) une suite réelle positive et majorée telle que la série $\sum a_n$ diverge.

   (a) Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$.

   (b) Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n e^{in}}{1+a_n e^{in}}$ n'est pas absolument convergente.