# Introduction aux similitudes | 4

## 1. Transformations admettant une écriture complexe de la forme $z' = az + b$

On considère l'ensemble $\mathscr{S}$ des transformations du plan admettant une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.
Que se passe-t-il si $a = 0$ ?

### 1 - 1. Rappel

Rappeler l'écriture complexe des translations, rotations et homothéties.
Quelle relation existe-t-il entre ces transformations et $\mathscr{S}$?

### 1 - 2. Exemple (Etude d'un cas particulier)

On considère la transformation $s$ d'écriture complexe $z' = 3\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.
**1.** Ecrire $s$ comme composée de trois transformations simples.
**2.** $s$ admet-elle un point invariant ? S'il existe (!), on le notera $\Omega$.
**3.** Soit A, B deux points distincts et A′ et B′ les points tels que $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$.

- Comparer $\Omega A$ et $\Omega A'$.
- Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right)$.
- Comparer $AB$ et $A'B'$.
- Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

**4.** Ecrire $s$ comme composée de deux transformations simples.
Faire un petit dessin pour conclure!

### 1 - 3. Cas général : recherche d'un point invariant

Soit $s$ un élément de $\mathscr{S}$.
$s$ admet-elle un ou plusieurs points invariant (ou fixe)?

### 1 - 4. Cas général : distance et angle

Soit $s$ un élément de $\mathscr{S}$.
Soit A, B deux points distincts et A′ et B′ les points tels que $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$.
**1.** On se place dans le cas où $s$ admet un point invariant que l'on notera $\Omega$.

- Comparer $\Omega A$ et $\Omega A'$.
- Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right)$.

**2.** On considère une transformation $s$ quelconque de $\mathscr{S}$.

- Comparer $AB$ et $A'B'$.
- Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

**3.** $s$ admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a = [k, \theta]$.
Ecrire $s$ comme composée de deux transformations simples.

> *Remarque :*
> *Les éléments de $\mathscr{S}$ sont appelés des similitudes directes. Par définition, une similitude directe multiplie les distances par un réel $k$ et conserve les angles orientés.*

### 1 - 5. Un exemple pour finir!

On considère la transformation $s$ d'écriture complexe $z' = -3\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$.
**1.** $s$ admet-elle un point invariant ? S'il existe (!), on le notera $\Omega$.
**2.** Déterminer le rapport $k$ et une mesure $\theta$ de l'angle de $s$.
**3.** Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle de mesure $\theta$.
Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$.
Déterminer l'écriture complexe des transformations $h \circ r$ et $r \circ h$.
Faire un petit dessin!

## 2. Transformations admettant une écriture complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$

On considère l'ensemble $\mathscr{S}'$ des transformations du plan admettant une écriture complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$.

### 2 - 1. Un cas particulier

On considère la transformation $s_0$ d'écriture complexe $z' = \overline{z}$.
Identifier $s_0$.

### 2 - 2. Cas général

Soit $s$ un élément de $\mathscr{S}'$. Montrer que $s$ peut s'écrire comme la composée d'un élément de $\mathscr{S}$ et de $s_0$.
Quelles propriétés simples peut-on en déduire pour les éléments de $\mathscr{S}$?

### 2 - 3. Exemple complet et non simple

On considère la transformation $f$ d'écriture complexe $z' = 2\mathrm{i}\overline{z} + 2 - \mathrm{i}$.
**1.** Démontrer que $f$ admet un point invariant $I$.
**2.** Soit A, B deux points distincts et A′ et B′ les points tels que $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$.
Calculer le rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$.
**3.** On note $h$ l'homothétie de rapport $k$ et de centre $I$.
On pose $\sigma = f \circ h^{-1}$.
Démontrer que $\sigma$ a pour écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$$

**4.** Déterminer l'ensemble des points invariants de $\sigma$.
**5.** Déterminer la nature de $\sigma$.
**6.** Démontrer que $f$ est la composée d'une réflexion et d'une homothétie.

> *Remarque :*
> *Les éléments de $\mathscr{S}'$ sont appelés des **similitudes indirectes**.*
> *Par définition, une similitude indirecte multiplie les distances par un réel k et transforme un angle orienté en son opposé.*