Terminale S	**MATH**	Examen commun de novembre 2015 (3h)

Exercice 1 (*10 pts*)

Partie A

On considère l'équation (E)

$$z^4-2z^3+5z^2-6z+6=0$$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z
$$z^4-2z^3+5z^2-6z+6=(z^2+3)(z^2-2z+2)$$
2. En déduire la résolution de l'équation (E) dans l'ensemble des complexes.

Partie B

On considère le polynôme $P(z)=z^3-5z^2+9z-5$.

1. Vérifier que $P(2+i)=0$ en détaillant les calculs.
2. Démontrer que pour tout nombre complexe z , $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$.
3. En déduire une autre solution de l'équation $P(z)=0$.

Partie C

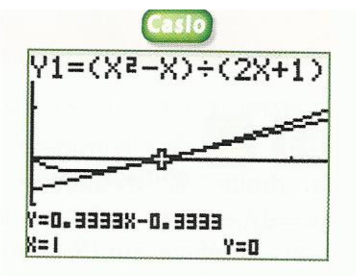
Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes respectives $z_A=3+2i$, $z_B=-i$ et $z_C=-2-3i$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés .

Partie D

A tout nombre complexe z différent de $-2i$, on associe le nombre complexe $Z=\frac{z-1}{z+2i}$.
On pose $z=x+iy$ où x et y sont deux réels.

1. Calculer Z dans le cas où $z=2+i$.
2. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel.
4. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 2 (*2 pts*)



Soit f la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x)=\frac{x^2-x}{2x+1}$.

1. Calculer $f'(x)$ sur $[0\,;3]$.
2. Justifier l'équation de la tangente affichée sur l'écran.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;3]$.

<u>Exercice 3</u> (*3 pts*)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \text{¿} -1}} \left(x+1+\frac{x-1}{x+1} \right)$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \text{¿} 2}} \left(\frac{3x^2-6x}{x-2} \right)$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1} \right)$.

<u>Exercice 4</u> (*5 pts*)

La suite *u* est définie sur ¿¿ par : $u_n = \frac{n-1}{3n-2\sin n}$ avec n en radians.

1. Donner une valeur approchée à 0,001 près à la calculatrice de u_{20} , u_{50} et de u_{100} . Que peut-on conjecturer sur la limite éventuelle de cette suite u ?

2. a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,
   $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n-2\sin n} \geq \frac{1}{3n+2}$
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{n-1}{3n+2} \leq u_n \leq \frac{n-1}{3n-2}$.
   c) En déduire la limite de la suite *u*.

<u>Exercice 5</u> (*10 pts*)

Soit *u* la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

Si *f* est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ alors on a pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne (fin du sujet) une partie de la courbe C représentant *f* ainsi que la droite d d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses placer u_0 , puis construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la limite de la suite u .
   c) A l'aide de la calculatrice, donner des valeurs précises de u_1 , u_2 , u_3 et u_{10} à 0,0001 près.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $1 < u_n < 4$.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(4-u_n)(u_n-1)}{u_n}$.

   b) En déduire le sens de variation de la suite u .

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\dfrac{4-u_n}{u_n-1}$.
   a) Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
   c) En déduire la limite de la suite u .

***Indication** : On admet que : pour tout entier naturel n, si* $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n=0$.

5. On donne l'algorithme suivant :

a)
« ca
b)
puis
c)

```
Variables
A et U sont des nombres réels
N est un entier naturel
Début
Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 2
Saisir A
TantQue 4 - U ¿ A
  U prend la valeur 5 - 4/U
  N prend la valeur N + 1
Fin TantQue
Afficher N
Fin
```

Traduire cet algorithme en langage
lculatrice ».
Tester cet algorithme pour A=0,1 ; A= 0,01
pour A=0,001 .
Que fait cet Algorithme ?