CHAPITRE

1

COMPLEXES - Parte oane

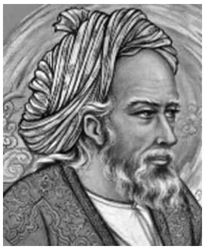
Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors commençons par parcourir le deuxième millénaire qui a vu mûrir petit à petit cette notion dans les esprits.

1 Approche historique

1 1 Les équations du second degré

Depuis plus de 3 000 ans on sait résoudre ce que l'on appelle aujourd'hui des équations du second degré. Cependant, très tôt, les Babyloniens, par exemple, sont restés bloqués au moment de résoudre des équations du troisième degré. Il faut attendre le XI[e] siècle pour qu'un savant perse commence à entrevoir une méthode approchée de résolution.
Toute cette section doit beaucoup aux activités proposées par Anne BOYÉ dans *Images, imaginaires, imaginations* paru chez *Ellipses en 1998* (pages 122-173)

1 2 Résolution géométrique de l'équation $x^3+ax=b$



Au XI[e] siècle vécut en Perse Ghiyath ed-din Abdoul Fath Omar Ibn Ibrahim al-Khayyam Nishabouri, ou plutôt : غياث الدين ابو الفتح عمر بن ابراهيم خيام نيشابورى , plus connu sous le nom d'Omar Khayyam. Il fut un poète joyeux et insouciant :

> *La Roue tourne, insoucieuse des calculs des savants.*
> *Renonce à t'efforcer vainement de dénombrer les astres.*
> *Médite plutôt sur cette certitude : tu dois mourir, tu ne rêveras plus,*
> *Et les vers de la tombe ou les chiens errants dévoreront ton cadavre.*

mais aussi un mathématicien visionnaire qui, avec quelques siècles d'avance sur les savants européens, découvrit des résultats importants concernant la résolution des équations du troisième degré. Son approche est géométrique et ne permet d'obtenir qu'une approximation graphique d'une solution.
Omar ne considérait que des équations à coefficients positifs.
Nous allons par exemple nous occuper de :

$$x^3 + ax = b \qquad \text{(E)}$$

où x, a et b désignent des nombres réels positifs mais jouant des rôles différents :
- x est l'*inconnue* de l'équation ; le but du jeu est en effet de déterminer les (ou des...) nombres réels positifs qui satisfont l'équation (E) ;
- a et b sont des *paramètres* : plutôt que d'étudier séparément des équations comme $x^3 + 2x = 1$, $x^3 + x = 7$, ..., Al Khayyam avait compris qu'elles pouvaient être résolues de manière similaire, quelque soit les valeurs positives prises par a et b. Les solutions de l'équation dépendront donc de ces paramètres.

Nous allons donc *qualitativement* l'équation (E).

1 2 a Paraboles et cercles

Dans le premier quadrant d'un repère orthonormal, considérons la branche de parabole d'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{a}}$ et le demi-cercle passant par l'origine du repère, centré sur l'axe des x positifs et de diamètre $\frac{b}{a}$.

Recherche

Démontrez que l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes, distinct de l'origine, est solution de (E).

1 2 b Paraboles et hyperboles

Voyons les choses autrement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow x(x^2+a)=b \\
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow x^2+a=\frac{b}{x} \quad \text{ou} \quad x=0
\end{aligned}$$

Recherche

Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

1 3 La Renaissance italienne

1 3 a Un saut dans l'espace-temps : combien l'équation x³+px+q=0 a-t-elle de solutions dans R ?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVIe siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXIe, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.
Considérons donc la fonction $f\ :\ x\mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe [a]

Recherche

Calculez la dérivée de f.

Quel est son signe ? Distinguons deux cas :
- $\mathbf{p\geqslant 0}$: alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.
- $\mathbf{p<0}$: alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ que nous appellerons a et $-a$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

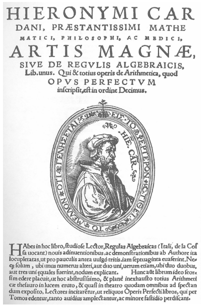
a. comme nous le verrons dans un prochain chapitre mais l'idée paraît naturelle !...

Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[-a, a]$ et $[a, +\infty[$.

Recherche

Montrez que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$ en utilisant le fait que $f(a) = 0$.
Que vaut $f(a) \cdot f(-a) = ?$
Pourquoi a-t-on $f(a) < f(-a)$?
Entamez alors la discussion en distinguant trois cas (*Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois et...*)

1 3 b Résolvons ces équations



Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle. Giralomo CARDANO a établi en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

Recherche

Utilisez cette formule pour trouver une solution de (E_1) : $x^3 - 36x - 91 = 0$

On voudrait faire de même avec (E_2) : $x^3 - 15x - 4 = 0$. Un problème apparaît...

Recherche

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$.
Utilisons alors la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce :

Recherche

calculez $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3$

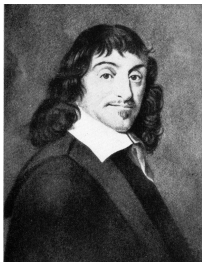
On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3 + 27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3 - 15x - 4$ par $x - \alpha$.

Recherche

Faites-le !
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIX$^{\text{e}}$ siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Évariste GALOIS propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

1 4 Descartes et les imaginaires



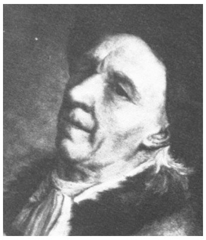
Presqu'un siècle après CARDANO, BOMBELLI e tutti quanti, cette racine carrée de -1 continue (et continuera) de faire peur.
Voici de qu'écrit DESCARTES en 1637

> *Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement* ***imaginaires****; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ay dit en chaque équation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine; comme encore qu'on puisse imaginer trois eb celle-ci* $x^3-6xx+13x-10=0$, *il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2; et pour les autres, quoy qu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.*

Recherche

Résolvez l'équation proposée par DESCARTES en tenant compte du renseignement qu'il donne.

1 5 Une notation malheureuse



En 1774, le mathématicien suisse Leonhard EULER remarque que la notation $\sqrt{-1}$ peut prêter à confusion.
En effet, dans le cas où *a est un nombre positif*, vous avez appris que $\sqrt{a}$ *désigne le nombre positif dont le carré vaut* a.
Cela se traduit par l'égalité :

$$\text{Pour tout réel positif } a,\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Recherche

- Vous avez de même établi que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$. Sauriez-vous le démontrer en utilisant la définition rappelée ci-dessus ?
- Si l'on généralise cette dernière règle à tous les réels, à quoi devrait être égal :
  - ▷ $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$?
  - ▷ $\left(\sqrt{-1}\right)^2$?
- Qu'en pensez-vous ?
- Calculez de même $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ de deux manières différentes.

Pour pallier à ces contradictions, EULER décide de désigner ce nombre $\sqrt{-1}$ par la lettre i (i comme...).
Ainsi :

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Cette notation ne sera pas adoptée tout de suite mais c'est elle dont l'usage est largement répandue de nos jours et que nous utiliserons.

Recherche

À l'aide de cette notation, écrivez le plus simplement possible les nombres qui ont pour carré -25 ; -2 ; $-\sqrt{3}$

1 6 Une représentation géométrique des nombres

1 6 a Une même idée jaillie de trois esprits indépendants

Il vous est naturel de représenter des nombres sur une droite graduée, de visualiser ce que peut être un nombre négatif, l'addition de deux nombres mais cela nous cantonne à nous promener sur une droite.
D'un autre côté, les nombres, depuis l'antiquité, ne trouve leur validité auprès des mathématiciens (et aussi de leurs élèves) que si on peut les « construire ».
Or, voilà que l'espace mathématique est de plus en plus envahi par ces nombres imaginaires qui continuent à tordre les esprits car on ne peut pas les « voir ».

Alors que les plus grands esprits depuis trois siècles essayent de donner vie à ces nouveaux nombres fort utiles, la lumière va venir en 1799 d'un modeste arpenteur-géomètre danois inconnu de tous (et qui le restera car il va publier son mémoire en danois et sera donc peu lu pendant un siècle avant d'être enfin traduit !), Caspar WESSEL (en photo), et presque simultanément (1806) d'un tout aussi modeste libraire suisse installé à Paris, Jean-Robert ARGAND, et enfin d'un prêtre français exilé en Angleterre et mathématicien amateur, Adrien-Quentin BUÉE.
Leurs résultats ne seront acceptés que lorsqu'ils seront re-découverts par des savants illustres dont le brillantissime GAUSS.

1 6 b Les Français rationnels

Pour les deux francophones, il s'agissait de trouver une signification géométrique plausible pour ces nombres.

Recherche

Considérez un triangle EIA quelconque et soit K le projeté orthogonal de E sur [IA]. Montrez que

$$\mathrm{KAKI} = \mathrm{KE}^2$$

M. ARGAND nous demande alors de considérer un cercle de centre K, de diamètre [IA] et tel que E soit l'image de A par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On associe à K le nombre 0, à A le nombre 1. Il est alors naturel d'associer à I le nombre -1.

Recherche

Quel nombre peut-on associer à E ?

1 6 c Le Danois pratique

L'arpenteur WESSEL a lui une vision plus dynamique : il veut représenter des directions par des nombres, non plus sur une droite seulement (positifs et négatifs) mais sur un plan (le plan des cartes qu'il doit dessiner !).
Laissons-le parler :

Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique et entre un segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu.

Recherche

Petite pause : comment appelleriez-vous ces fameux segments orientés dont parle l'auteur ?

[..] Essayons donc de généraliser la signification des opérations : n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage aux segments de droite de même sens ou de sens opposés [...]. Si en même temps qu'on prend cette liberté, on respecte les règles ordinaire des opérations, on ne tombe point en contradiction avec l'ancienne théorie des nombres, mais on la développe seulement, on s'accommode à la nature des quantités et on observe la règle générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisé à comprendre une théorie difficile.[...] Par là précisément [...] non seulement on réussit à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour expliquer le possible, mais encore on parvient à exprimer la direction des segments de droite situés dans un même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur. Or il faut convenir que la démonstration générale de théorèmes géométriques devient souvent plus facile lorsqu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la soumettre aux règles des opérations algébriques, que lorsqu'on est réduit à la représenter par des figures qui ne sont applicables qu'à des cas particuliers. [b]

Voici résumé par un homme de terrain en quelques phrases ce qu'il faut comprendre sur ces nouveaux nombres qui sont l'objet de notre étude.

Recherche

Commentez ce court extrait de l'introduction de l'essai de WESSEL.

1 6 d Somme des nombres imaginaires

Voici comment WESSEL présente son addition de segments orientés :

L'addition de deux segments se fait de la manière suivante : on les combine en faisant partir l'un d'un point où l'autre se termine ; puis on joint par un nouveau segments les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue. [c]

Recherche

Ça vous rappelle quelque chose ? Que pensez-vous des termes utilisés ?

b. Caspar WESSEL, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, pp 3-5 de la traduction française disponible sur Gallica http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k99681g.r=caspar+wessel.langFR

c. Ibid page 7

1 6 e Produit de nombres imaginaires

WESSEL établit les règles suivantes :

> *[...]*
> – *Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ;*
> – *En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit [...] dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.*
>
> *Désignons par* $+1$ *l'unité rectiligne, par* $+\epsilon$ *une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de* $+1$ *sera égal à 0°, celui de* -1 *à 180°, celui de* $+\epsilon$ *à 90°et celui de* $-\epsilon$ *à -90°ou à 270° ; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura :*
>
> $(+1)\cdot(+1)=+1$, $(+1)\cdot(-1)=-1$, $(-1)\cdot(-1)=+1$, $(+1)\cdot(+\epsilon)=+\epsilon$, $(+1)\cdot(-\epsilon)=-\epsilon$, $(-1)\cdot(+\epsilon)=-\epsilon$, $(-1)\cdot(-\epsilon)=+\epsilon$, $(+\epsilon)\cdot(+\epsilon)=+\epsilon$, $(+\epsilon)\cdot(-\epsilon)=+1$, $(-\epsilon)\cdot(-\epsilon)=-1$.
>
> *Il en résulte que* ϵ *est égal à* $\sqrt{-1}$ *et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires.* [d]

Recherche

Illustrez par des schémas ce qui est clairement exposé par WESSEL.

On peut donc représenter un nombre à l'aide d'une « longueur » et d'une « déviation » (que nous appellerons bientôt *module* et *argument*).

Recherche

Dans un repère orthonormal orienté, représentez les nombres « impossibles » suivant les préconisations de WESSEL :

- $z_1 : \left[2,\frac{\pi}{2}\right]$
- $z_2 : \left[2,\frac{4\pi}{3}\right]$
- $z_3 : \left[\frac{3}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_4 : \left[\frac{2}{3},\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_5 : \left[2,\frac{\pi}{2}\right]$
- $z_6 : \left[1,\frac{\pi}{2}\right]$
- $z_7 : \left[2,\frac{3\pi}{2}\right]$
- $z_8 : \left[1,\frac{5\pi}{2}\right]$
- $z_9 : \left[\frac{2}{3},\pi\right]$
- $z_{10} : \left[\frac{3}{2},2\pi\right]$

Calculez ensuite le produit deux à deux des six premiers nombres en présentant vos résultats dans un tableau.

Construisez les « images » de $z_3\cdot z_6$ et $z_1\cdot z_3$.

Résolvez les deux équations suivantes :

$$(\mathrm{E}_1)\ :\ \left[\frac{3}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cdot z=\left[3,\frac{\pi}{12}\right]\qquad(\mathrm{E}_2)\ :\ \left[2,\frac{\pi}{3}\right]\cdot z=\left[1,\frac{\pi}{6}\right]$$

Écrivez la suite des puissances entières successives de $\left[1,-\frac{\pi}{3}\right]$.
Faites de même avec $[r,\theta]$. Des commentaires ?

d. Ibid page 9

1 7 Gauss : clair et génial

Beaucoup de légendes circulent au sujet de Carl Friedrich GAUSS, fils d'un modeste jardinier, qui aurait commencé sa carrière mathématique très tôt en donnant instantanément à dix ans la somme des termes d'une suite arithmétique très compliquée, aurait dit « dites lui d'attendre un moment que j'aie fini » alors qu'on lui annonçait que sa femme se mourrait au milieu d'une de ses démonstrations. Sa devise était *pauca sed matura* ce qui explique qu'il ait publié des résultats bien des années après en avoir eu l'intuition.

Ceci étant, il donna dans sa thèse de Doctorat parue en 1799 une première démonstration de ce qu'on appellera ensuite le *théorème fondamental de l'algèbre*, à savoir que toute équation de degré n a n solutions pouvant s'écrire sous la forme $a+\mathrm{i}b$ avec a et b des nombres réels et i le fameux nombre dont nous parlons depuis le début de ce cours.

Il appellera plus tard (1831) l'ensemble de tous ces nombres *ensemble des nombres complexes*, les opérations valables dans $\mathbb{R}$ se prolongeant dans cet ensemble comme nous l'avons découvert dans les paragraphes précédents.

Recherche

Essayez d'écrire les nombres suivant sous la forme $x+\mathrm{i}y$ avec x et y des nombres réels et i le nombre de carré -1 :
$(3+5\mathrm{i})+(9-2\mathrm{i})$; $(3-4\mathrm{i})-(-1+\mathrm{i})$; $(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})$; $4(2+7\mathrm{i})$; $(4+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$
$(-2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$; $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$; $(a+\mathrm{i}b)^2$; $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$

Douze ans plus tard, il évoque dans une lettre au mathématicien Friedrich BESSEL un résultat qu'il ne publiera qu'en 1831 :

> *De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où, chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a+b\mathrm{i}$. Le passage se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières.*

Recherche

Que vous rappelle l'idée exposée par GAUSS ?
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, placez les points correspondant à :

$$1\ ;\ \mathrm{i}\ ;\ -\mathrm{i}\ ;\ 2-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\ ;\ 3-2\mathrm{i}\ ;\ \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

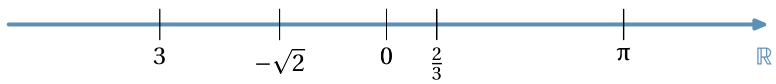
Les nombres réels sont-ils des nombres complexes ? Sur quelle partie du plan complexe se représentent-ils ? Quelle propriété caractérise les nombres représentés sur l'axe des ordonnées du plan complexe ?
Comment peut-on rapprocher les formulations $[r,\theta]$ et $a+\mathrm{i}b$?

Pour finir, une dernière citation de GAUSS qui nous permettra de méditer sur les aléas du progrès scientifique :

> *Jusqu'à ce jour on avait surtout discuté sur la théorie des nombres complexes d'un mauvais point de vue, on avait senti une obscurité mystérieuse. Mais la raison de ceci est en grande partie due à une dénomination maladroite. Si on n'avait pas caractérisé* $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ *par unité positive, négative, imaginaire (ou plus fort impossible), mais par unité directe, inverse et latérale, l'obscurité mentionnée n'aurait pas surgi.*

2 Approche « moderne »

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux[e], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés[f] :

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x1=1x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $xx^{-1}=x^{-1}x=1$

e. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

f. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4[e] et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

– La multiplication est distributive sur l'addition : $x(y+z) = xy + xz$.

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2, c'est-à-dire pouvoir calculer avec des couples de nombres du style (x, y).

Téhessin : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessin : Ben pour l'addition, on fait $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Mathémator : Pourquoi pas ! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessin : On a un élément neutre : (0,0) car $(x, y) + (0,0) = (x+0, y+0) = (x, y)$.

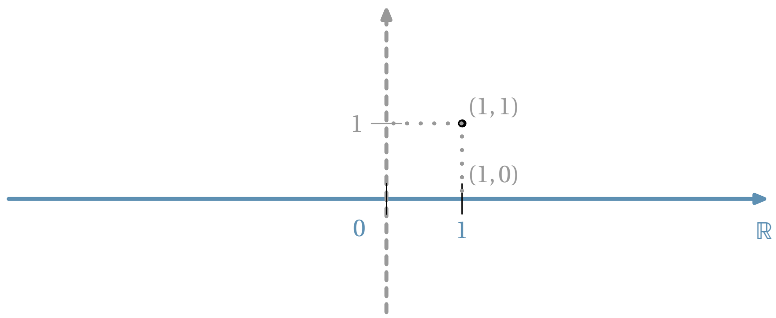
Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessin : Et pour le symétrique, on prend $(-x, -y)$ car $(x, y)+(-x, -y) = (0,0)$ l'élément neutre.

Mathémator : En effet. Et pour la multiplication ?

Téhessin : Ça doit être pareil : $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$ avec $(1,1)$ comme élément neutre.

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x, y)(1,0) = (x, y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Téhessin : Fichtre ! Essayons : $(x, y)(1,0) = (x1 - y0, x0 + y1) = (x, y)$. Ça marche.

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ admet un inverse

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Téhessin : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0,1)$ et élevez-le au carré.

Téhessin : Allons-y : $(0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0)$, bon et alors ?

Mathémator : Alors $(-1,0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0,1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellemnt en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessin : Naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.
L'idée vient de l'observation *intuitive*[g] :

$$\text{« } (x,y) \curvearrowright x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1) \curvearrowright x1 + y\sqrt{-1} \curvearrowright x + y\sqrt{-1} \text{ »}$$

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+\mathrm{i}y \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prolongeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessin : Si vous le dites : $(x+\mathrm{i}y) + (x'+\mathrm{i}y') = x+\mathrm{i}y+x'+\mathrm{i}y' = (x+x') + i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$, mais en plus simple.

Téhessin : Et $(x+\mathrm{i}y)\cdot(x'+\mathrm{i}y') = xx' + \mathrm{i}xy' + \mathrm{i}yx' + \mathrm{i}^2yy'$

Mathémator : N'oubliez pas que $\mathrm{i}^2 = -1$

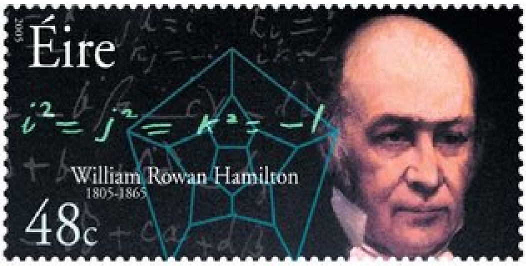
Téhessin : Alors $(x+\mathrm{i}y)\cdot(x'+\mathrm{i}y') = (xx'-yy') + i(xy'+yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

g. Les $\curvearrowright$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

2 1 Hamilton et les couples de nombres



Le mathématicien irlandais William Rowan HAMILTON publie en 1837 *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples*[h].
En voici un extrait qui n'est pas sans rappeler la discussion précédente :

On the Addition, Substraction, Multiplication, and Division, of Number-Couples, as combined with each other.

6. Proceeding to operations upon number-couples, considered in combination with each other, it is easy now to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in the simplest way, the analogy of the theory of couples to the theory of singles :

$$(b_1,b_2)+(a_1,a_2)=(b_1+a_1,b_2+a_2); \tag{52.}$$

$$(b_1,b_2)-(a_1,a_2)=(b_1-a_1,b_2-a_2); \tag{53.}$$

$$(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(b_1a_1-b_2a_2,b_2a_1+b_1a_2); \tag{54.}$$

$$\frac{(b_1,b_2)}{(a_1,a_2)}=\left(\frac{b_1a_1+b_2a_2}{a_1^2+a_2^2},\frac{b_2a_1-b_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\right). \tag{55.}$$

Were these definitions even altogether arbitrary, they would at least not contradict each other, nor the earlier principles of Algebra, and it would be possible to draw legitimate conclusions, by rigorous mathematical reasoning, from premises thus arbitrarily assumed : but the persons who have read with attention the foregoing remarks of this theory, and have compared them with the Preliminary Essay, will see that these definitions are really not arbitrarily chosen, and that though others might have been assumed, no others would be equally proper.

With these definitions, addition and subtraction of number-couples are mutually inverse operations, and so are multiplication and division ; and we have the relations,

$$(b_1,b_2)+(a_1,a_2)=(a_1,a_2)+(b_1,b_2), \tag{56.}$$

$$(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(a_1,a_2)(b_1,b_2), \tag{57.}$$

$$(b_1,b_2)\{(a'_1,a'_2)+(a_1,a_2)\}=(b_1,b_2)(a'_1,a'_2)+(b_1,b_2)(a_1,a_2): \tag{58.}$$

we may, therefore, extend to number-couples all those results respecting numbers, which have been deduced from principles corresponding to these last relations. For example,

$$\{(b_1,b_2)+(a_1,a_2)\}\{(b_1,b_2)+(a_1,a_2)\}=(b_1,b_2)(b_1,b_2)+2(b_1,b_2)(a_1,a_2)+(a_1,a_2)(a_1,a_2), \tag{59.}$$

in which

h. : http ://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/PureTime/PureTime.pdf

$$2(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(2,0)(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(b_1,b_2)(a_1,a_2)+(b_1,b_2)(a_1,a_2); \tag{60.}$$

for, in general, we may mix the signs of numbers with those of number-couples, if we consider every single number a as equivalent to a pure primary number-couple,

$$a=(a,0). \tag{61.}$$

When the pure primary couple $(1,0)$ *is thus considered as equivalent to the number* 1*, it may be called, for shortness, the primary unit ; and the pure secondary couple* $(0,1)$ *may be called in like manner the secondary unit.*

We may also agree to write, by analogy to notations already explained,

$$\begin{aligned}(0,0)+(a_1,a_2) &= +(a_1,a_2),\\ (0,0)-(a_1,a_2) &= -(a_1,a_2); \quad (62.)\end{aligned}$$

and then $+(a_1,a_2)$ *will be another symbol for the number-couple* (a_1,a_2) *itself, and* $-(a_1,a_2)$ *will be a symbol for the opposite number-couple* $(-a_1,-a_2)$*. The reciprocal of a number-couple* (a_1,a_2) *is this other number-couple,*

$$\frac{1}{(a_1,a_2)}=\frac{(1,0)}{(a_1,a_2)}=\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)=\frac{(a_1,-a_2)}{a_1^2+a_2^2}. \tag{63.}$$

It need scarcely be mentioned that the insertion of the sign of coincidence = between any two number-couples implies that those two couples coincide, number with number, primary with primary, and secondary with secondary ; so that an equation between number-couples is equivalent to a couple of equations between numbers.

HAMILTON inventera par la suite la théorie des *quaternions*, qui en quelque sorte des « super-complexes » mais en dimension 4 ! Il introduira d'ailleurs à cette occasion le terme de *vecteur*.

2 2 Cinéma

Un magnifique film résume nos premières aventures. Il se trouve à l'adresse suivante :

http ://www.dimensions-math.org/Dim_reg_F.htm

3 Vocabulaire et premières propriétés

Théorème 1 - 1

Ensemble $\mathbb{C}$
On définit un ensemble $\mathbb{C}$
- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + \mathrm{i}b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

3 1 Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathfrak{Re}(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathfrak{Im}(z)$

Danger

$\mathfrak{Im}(z)$ est un nombre réel.

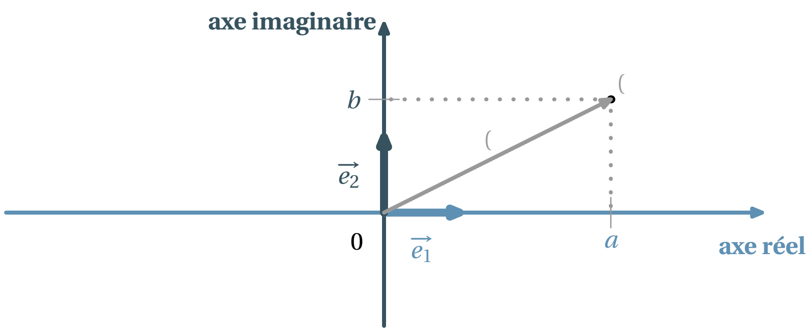
Aparté

À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?
Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+\mathrm{i}(7x-32y+1)=0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0+\mathrm{i}\cdot 0$.
Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x+3y-5+\mathrm{i}(7x-32y+1)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 7x-32y+1=0 \end{cases}$$

3 2 Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$



À tout nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$ on associe le point M de coordonnées (a,b) qu'on appelle **image** de complexe $z=a+\mathrm{i}b$. On le note souvent $\mathrm{M}(z)$.

Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** $z = a + \mathrm{i}b$ qu'on note souvent z_{M}.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a, b) dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = a + \mathrm{i}b$

3 3 Premiers calculs géométriques

– Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b'), alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + a')\overrightarrow{e_1} + (b + b')\overrightarrow{e_2}$, donc

Propriété 1 - 1

affixe d'une somme

$$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$$

– De même, si λ est un nombre réel

Propriété 1 - 2

affixe du produit par un réel

$$z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}$$

– Alors, si I est le **milieu** du segment $[A, B]$, on a

Propriété 1 - 3

affixe du milieu

$$z_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}(z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}})$$

– Pour tous points A et B

Propriété 1 - 4

affixe d'un vecteur

$$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$$

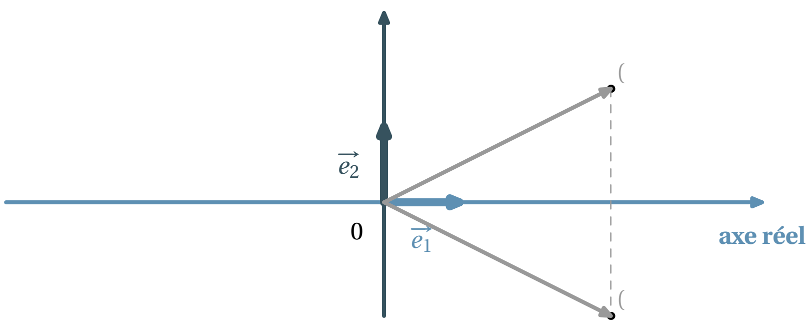
3 4 Conjugué d'un complexe

Définition 1 - 1

Conjugué
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ le nombre

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b$$

Géométriquement cela donne



Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 1 - 5

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

3 5 À quoi servent les conjugués ?

3 5 a À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel. **Pourquoi ?**

3 5 b À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2$$

Exemple

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + \mathrm{i}$:
$\frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{1}{2+\mathrm{i}}\frac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

3 6 Conjugué de l'inverse

Sachant qu'un complexe non nul z admet une forme algébrique $a+\mathrm{i}b$, on sait maintenant trouver la forme algébrique de son inverse :

et donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$

3 7 Module d'un nombre complexe

Définition 1 - 2

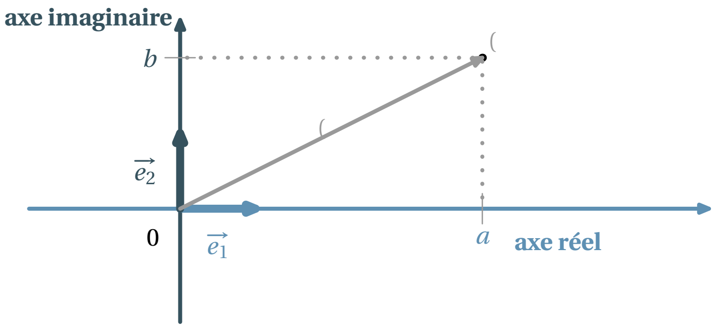
Module
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$$

Remarque

– Cette définition en est bien une car $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
– Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\,\overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

3 7 a Interprétation géométrique



Nous venons de voir que, si $z = a + \mathrm{i}b$, alors

Propriété 1 - 6

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2 + b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ou encore la longueur OM.

Propriété 1 - 7

$$|z_{\mathrm{M}}| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| = \mathrm{OM} \qquad \left|z_{\overrightarrow{u}}\right| = \left\|\overrightarrow{u}\right\|$$

3 7 b Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété 1 - 8

– $\left|\overline{z}\right| = |z|$
– $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
– $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
– $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| =$
– $\mathfrak{Re}(z) \leqslant |z|$
– $\mathfrak{Im}(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété 1 - 9

Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Pour les curieux, voici comment cela se démontre.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right) = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathscr{R}e\,(z_1z_2) \leqslant 2|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus.
Donc

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

4 Résolution d'équations du second degré

4 1 Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2=\alpha$

4 1 a Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

– $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0}$: alors $z^2=\alpha \iff z^2-\alpha = (z-\sqrt{\alpha})(z+\sqrt{\alpha})=0$. Les solutions[i] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$

Exemple

On connaît : $z^2=4 \iff z=-2$ ou $z=2$

– $\boldsymbol{\alpha < 0}$: alors $z^2=\alpha \iff (z-\mathrm{i}\sqrt{-\alpha})(z+\mathrm{i}\sqrt{-\alpha})=0$. Les solutions sont donc $\pm\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$

Exemple

C'est la nouveauté : $z^2=-4 \iff z=-2\mathrm{i}$ ou $z=2\mathrm{i}$

4 1 b Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Exemple

Cherchons les racines carrées de $4+3\mathrm{i}$, à savoir les nombres $a+\mathrm{i}b$ tels que

$$(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2-b^2+2\mathrm{i}ab = 4+3\mathrm{i}$$

Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2-b^2 &= 4 \\ a^2+b^2 &= 5 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2=9/2$ et $b^2=1/2$, donc $a=\pm3\sqrt{2}/2$ et $b=\pm\sqrt{2}/2$, or $2ab=3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+\mathrm{i})$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+\mathrm{i})$

i. LA solution si $\alpha=0$

4 2 Résolution de ax²+bx+c=0 avec a, b et c des réels

C'est comme en 1ère :

$$ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

Tout dépend donc du signe de b^2-4ac, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 1 - 2

Résolution de $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$. Notons

$$\Delta = b^2-4ac$$

le **discriminant** de l'équation et δ un *complexe* vérifiant

$$\delta^2=\Delta$$

- Si $\Delta=0$, il existe une unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta>0$, il existe deux solutions réelles $x=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$
- Si $\Delta<0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$

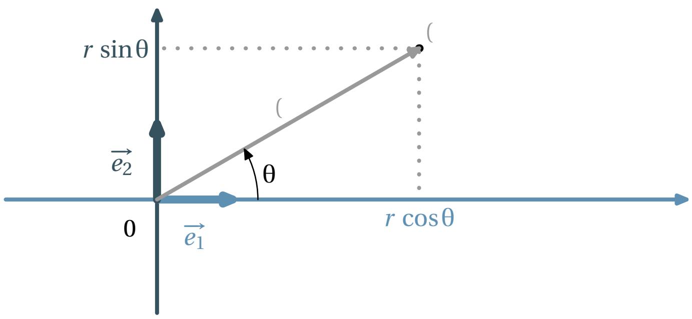
$$\boxed{\textbf{Dans tous les cas } x=\frac{-b\pm\delta}{2a}\,!}$$

5 FORME TRIGONOMÉTRIQUE

5 1 Argument d'un complexe non nul

5 1 a Forme trigonométrique

Vous vous souvenez de la correspondance entre $\mathbb{C}$ et le Plan. Nous avions privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires** comme vu lors de l'exploration du mémoire de WESSEL. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).



Ainsi, (r, θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M du nombre complexe z, on a $z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

Définition 1 - 3

forme trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Remarque

notation en électronique
Les électroniciens notent souvent ce résultat sous la forme : $z = [r, \theta]$

5 1 b Congruence

Vous rencontrerez souvent la notation $x \equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x - y$ est un multiple de 2π, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - y = k2\pi$.

Remarque

congruence modulo 2π

$$x \equiv y[2\pi] \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi$$

Par exemple, vous savez que $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$: dessinez un cercle trigonométrique pour vous en convaincre.

5 1 c Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π. Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z, qu'on notera $\arg z$. On retiendra :

Propriété 1 - 10

argument

$$\arg z \equiv \theta[2\pi]$$

Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32\mathrm{i} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

5 1 d Des formes trigonométriques de référence

- $1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|\mathrm{i}| = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+\mathrm{i}) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- $|\sqrt{3}+\mathrm{i}| = 2$ et $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

5 2 Correspondance forme algébrique - forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $a+\mathrm{i}b$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ alors on a d'une part :

Propriété 1 - 11

forme algébrique connaissant la forme trigonométrique

$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$

et d'autre part $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2+b^2}$ sera non nul également. Ainsi, nous pouvons écrire z sous la forme

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\ &= r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\ &= r(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

Propriété 1 - 12

forme trigonométrique en fonction de la forme algébrique

$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ainsi, connaissant a et b, on peut obtenir le module et un argument de $a+\mathrm{i}b$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $1/2$, $\sqrt{3}/2$, 1, etc.

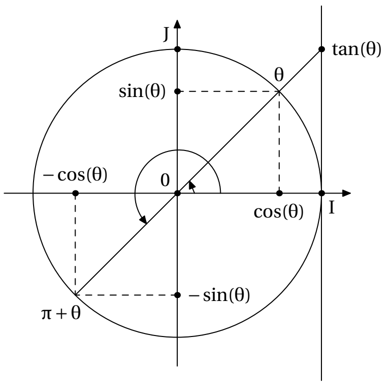
Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide des touches $\boxed{\mathrm{COS}^{-1}}$ et $\boxed{\mathrm{SIN}^{-1}}$, ou encore avec $\boxed{\mathrm{TAN}^{-1}}$. En effet, $\cos(\theta)$ étant non nul[j],

Propriété 1 - 13

argument en fonction de la forme algébrique

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a}$$

ce qui déterminera une valeur de l'argument modulo π.



j. Sinon, on sait qui est θ...

Il suffira ensuite de considérer le signe de $\cos(\theta)$ ou de $\sin(\theta)$ pour savoir à qui on a affaire.

5 3 Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'\left(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\right)$, alors

$$zz' = rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + \mathrm{i}\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right) + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta)'\right)$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

Propriété 1 - 14

argument d'un produit
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété 1 - 15

Propriétés algébriques des arguments

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème 1 - 3

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Nous nous rendons ainsi compte que :

Remarque

- Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes ;
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

6 De l'objet au complexe

6 1 Comment caractériser un cercle ?

Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de A. Il est facile de traduire simplement cela en langage complexe...

Remarque

caractérisation d'un cercle

$$\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \iff |z - z_\mathrm{A}| = \mathrm{R}$$

6 2 Comment caractériser un triangle isocèle ?

C'est encore une histoire de distance, donc de module : ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si AB = AC donc

Remarque

triangle isocèle

ABC isocèle de sommet principal A $\iff |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}| \iff \left|\dfrac{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}\right| = 1$

6 3 Comment caractériser un triangle rectangle ?

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}|^2 = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|^2 + |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{e_1}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right)+\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}\right)$$

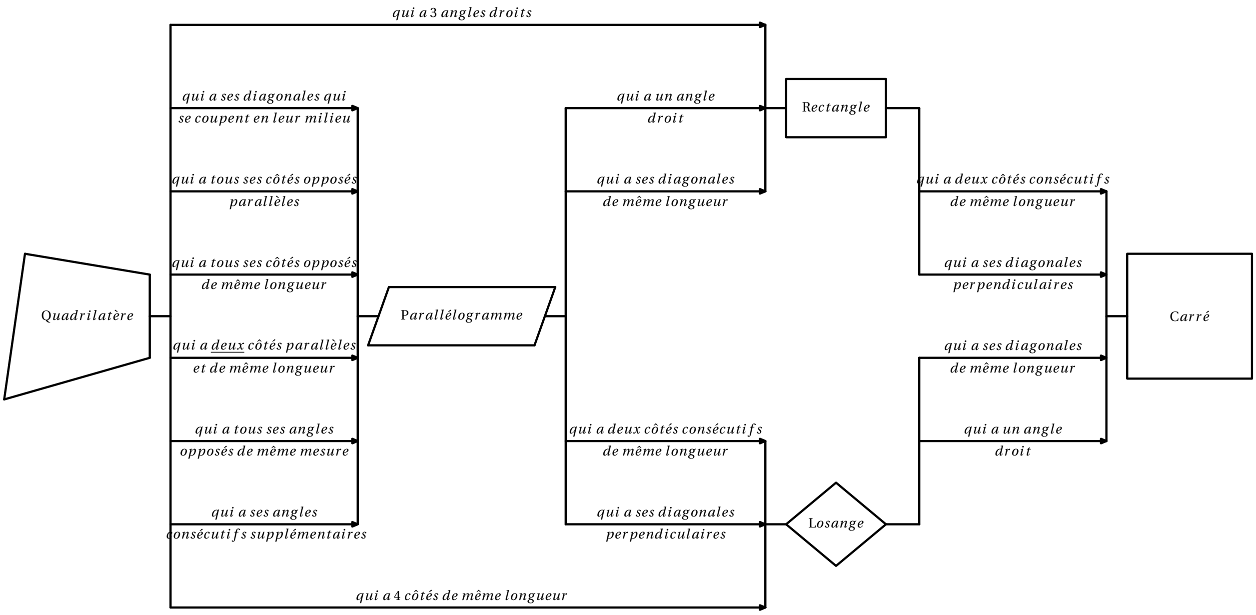
Remarque

triangle rectangle

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

6 4 Comment caractériser les différents quadrilatères ?

Petite révision de collège...



qu'il vous suffira d'adapter connaissant ce qui précède.

7 Du complexe à l'objet

7 1 Que représente z-32+5i ?

Soit A le point d'affixe $32-5\mathrm{i}$ et M le point d'affixe z, alors $z-32+5\mathrm{i} = z_\mathrm{M} - z_\mathrm{A} = z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}$

7 2 Comment interpréter |z-32+5i|=3 ?

D'après ce qui précède, on aboutit à $\mathrm{AM} = 3$: il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon 3.

7 3 Comment interpréter |32+i z|=5 ?

$|32+\mathrm{i}z| = |i(-32\mathrm{i}+z)| = |i||z-32\mathrm{i}| = |z-32\mathrm{i}| = \mathrm{BM}$ avec M le point d'affixe z et B le point d'affixe 32i. On retombe donc sur un cercle.

7 4 Comment interpréter |z-a|=|z-b| ?

Soit M d'affixe z, A d'affixe a et B d'affixe b. Alors l'égalité se traduit par $\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$, donc M est équidistant de A et B, donc M est sur la médiatrice de [AB].

7 5 Que se cache-t-il derrière le quotient (zC-zA)/(zB-zA) ?

Il suffit de remarquer que $\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

- $\arg\left(\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$
- $\left|\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = \lambda z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, donc

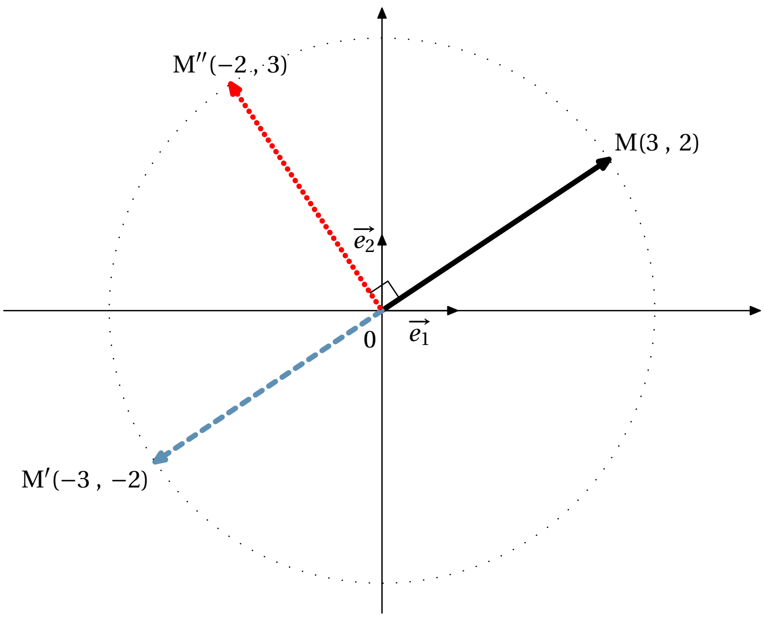
– si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et donc A, B et C sont alignés.
– si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = \pm|\lambda|iz_{\overrightarrow{AB}}$ et donc $\arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2} + \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right)$ $[2\pi]$ c'est à dire (AC)⊥(AB)
– si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

7 6 Comment interpréter qu'un angle de vecteurs est droit ?

On déduit de cette relation que le triangle AMB est rectangle en M, donc que M décrit le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

7 7 En attendant la deuxième partie du cours...

Soit $z = 3+2\text{i}$, alors $-1z = -3-2\text{i}$ et $iz = 3\text{i}+2\text{i}^2 = -2+3\text{i}$. Notons M, M′ et M″ les points d'**affixes** respectives z, $-z$ et iz

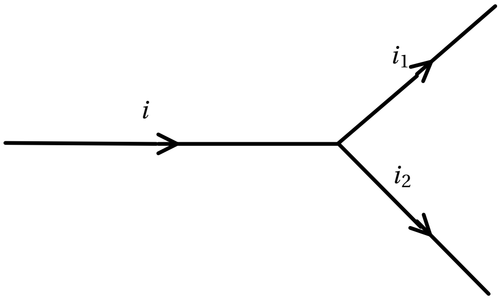


Ô monde merveilleux ! Une multiplication par i se traduit par un quart de tour, une multiplication par -1 se traduit par un demi-tour, deux multiplications successives par i, c'est à dire une multiplication par $\text{i}^2 = -1$ se traduit bien par deux quarts de tour, *i.e.* un demi tour. Mais ceci est une autre histoire...

8 Complexes et électronique

8 1 Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante :



Le courant initial i et les trois courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation .
Si $i_k = \widehat{\mathrm{I}_k}\sin(t+\varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace[k] de i_k on a

$$\underline{\mathrm{I}_k} = \mathrm{I}_k\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)$$

avec $\widehat{\mathrm{I}_k} = \sqrt{2}\mathrm{I}_k$

Aparté

En électronique, on note « j » le nombre de carré -1 pour ne pas le confondre avec le « i » de l'intensité...

La *loi des nœuds* nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + \mathrm{i}_2(t)$.
Il est temps à présent de se souvenir d'une petite formule de trigo :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

Vous pouvez alors montrer que, d'une part

$$i_1(t) + \mathrm{i}_2(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos\varphi_2\right)\sin(t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\sin\varphi_2\right)\cos(t)$$

et d'autre part

$$i(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi\right)\sin(t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi\right)\cos(t)$$

puisque la relation $i(t) = i_1(t) + \mathrm{i}_2(t)$ est vraie à chaque instant, elle est donc vraie en particulier au temps $t = 0$, d'où

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\sin\varphi_2$$

(pourquoi ?) et en $t = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos\varphi_2$$

Vous pouvez alors expliquer pourquoi $\underline{\mathrm{I}_0} = \underline{\mathrm{I}_1} + \underline{\mathrm{I}_2}$
dans le cas de signaux de même pulsation. Cela va nous rendre de grands services, car il va être beaucoup plus simple d'additionner des complexes plutôt que des grandeurs sinusoïdales.

k. Nous apprendrons à la calculer quand nous aurons étudié le calcul intégral

8 2 Exemple

Considérons $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ et $i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$
Alors vous obtenez d'une part

$$\underline{\mathrm{I}_1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,(1+\mathrm{j})$$

et d'autre part

$$\underline{\mathrm{I}_2} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{j}\right)$$

Nous en déduisons que

$$\underline{\mathrm{I}\ } = \underline{\mathrm{I}_1}+\underline{\mathrm{I}_2} = \left(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{j}\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)$$

On ne reconnais pas de lignes trigonométriques connues. Nous allons donc utiliser des valeurs approchées.

$$\underline{\mathrm{I}\ } \approx 4,012289774-0,08578643763\mathrm{j}$$

Nous en déduisons que l'intensité efficace vaut environ 4,01 Ampères et une mesure de son argument -0,021 radians, et donc

$$i(t) \approx 4,01\sqrt{2}\sin(t-0,021)$$

8 3 Impédance complexe

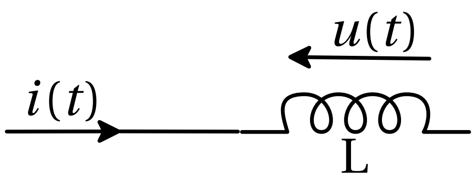
Vous verrez un jour que l'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \mathrm{R}+\mathrm{j}\mathrm{X}$$

avec R la resistance et X la réactance du dipôle..

8 4 Cas d'une bobine parfaite

On considère la situation suivante :



Par définition de l'intensité $i(t)$, on a $u(t) = \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$. Or $i(t) = \mathrm{I}\sqrt{2}\sin\left(t+\varphi\right)$, donc

$$\begin{aligned} u(t) =& \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{I}\sqrt{2}\sin\left(t+\varphi\right)\right)}{\mathrm{d}t} \\ =& \mathrm{L}\mathrm{I}\sqrt{2}\cos\left(t+\varphi\right) \\ =& \mathrm{L}\mathrm{I}\sqrt{2}\sin\left(t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{car} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, d'une part

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\left(\underline{Z}\right) &= \operatorname{Arg}\left(\underline{U}\right) - \operatorname{Arg}\left(\underline{I}\right)\\ &= \varphi + \tfrac{\pi}{2} - \varphi\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\left|\underline{Z}\right| &= \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|}\\ &= \frac{IL}{I}\\ &= L\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\underline{Z} = jL$$

car je vous rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$

Montrez de même que l'impédance complexe d'un condensateur parfait de capacité C vaut $\frac{1}{jc}$ sachant que par définition $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

.

9 FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

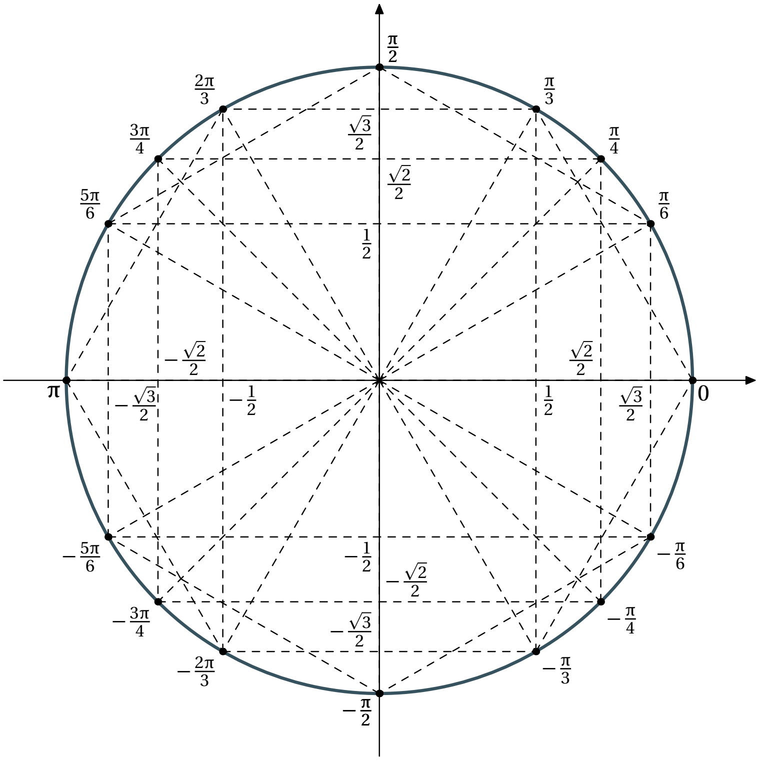
– **Formules**
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$, pour $a+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$, pour $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k'\in\mathbb{Z}$

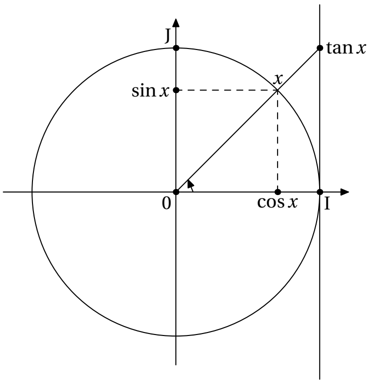
– **Transformation de produits en somme**
$\cos a\cdot\cos b=\dfrac{1}{2}\cdot(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
$\sin a\cdot\sin b=\dfrac{1}{2}\cdot(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
$\sin a\cdot\cos b=\dfrac{1}{2}\cdot(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

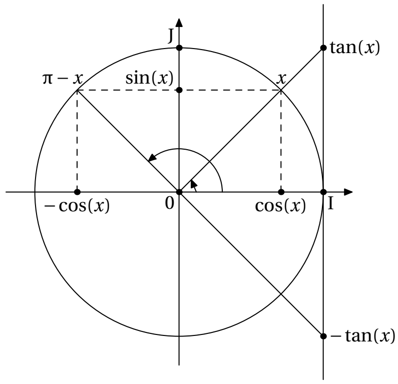
– **Transformation de sommes en produits**
$\cos p+\cos q=2\cdot\cos(\dfrac{p+q}{2})\cdot\cos(\dfrac{p-q}{2})$
$\cos p-\cos q=-2\cdot\sin(\dfrac{p+q}{2})\cdot\sin(\dfrac{p-q}{2})$
$\sin p+\sin q=2\cdot\sin(\dfrac{p+q}{2})\cdot\cos(\dfrac{p-q}{2})$
$\sin p-\sin q=2\cdot\sin(\dfrac{p-q}{2})\cdot\cos(\dfrac{p+q}{2})$

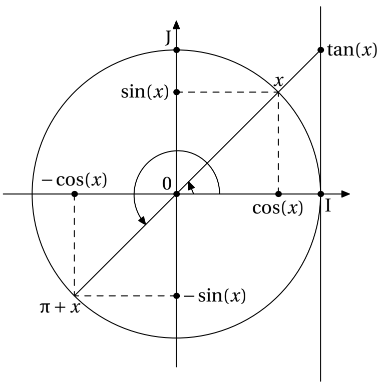
– **Formules de duplication**
$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$
$\sin(2x)=2\cos x\sin x$
$\tan(2x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ pour $k\in\mathbb{Z}$
Avec $t=\tan(\dfrac{x}{2})$, on a :
$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

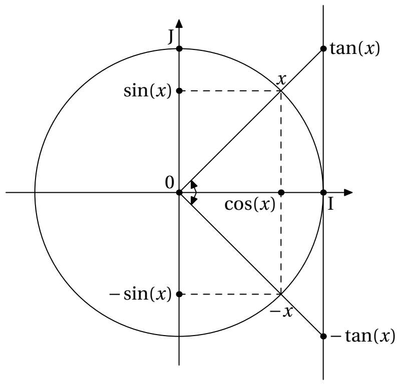
.


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$


J
$\tan x$
x
$\sin x$
0
$\cos x$
I


J
$\tan(x)$
$\pi - x$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\tan(x)$


J
$\tan(x)$
x
$\sin(x)$
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$\pi + x$

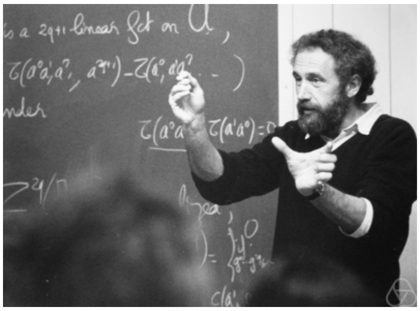

J
$\tan(x)$
x
$\sin(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$-x$
$-\tan(x)$

10 XCAS et les Complexes

Vous pouvez vous servir de XCAS comme super-calculatrice pour vérifier vos calculs stakhanovistes.
Commencez par le télécharger à cette adresse :

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ parisse/giac_fr.html

Ensuite, méditez cette pensée d'Alain CONNES, membre de l'Académie des sciences, Professeur au Collège de France, à l'I.H.E.S. et à l'Université de Vanderbilt aux États-Unis.
Alain CONNES a notamment reçu la Médaille Fields en 1982, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du C.N.R.S. en 2004.



Quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès.

Alain CONNES - *Sciences et imaginaire*

Le nombre i se note `i`. Il ne faut pas oublier l' `*` de la multiplication. Ensuite, les notations sont classiques :

```
z:=(3+2*i)*(1+2*i)
re(z);
im(z);
abs(z);
conj(z);
arg(1+i)
```

Pour obtenir un nombre sous forme algébrique, on peut utiliser `evalc` (évaluer en tant que complexe).
Pour résoudre une équation, on utilise
`resoudre_dans_C(equation,inconnue)`
ou bien
`csolve(equation,inconnue)` :

```
resoudre_dans_C(z^2+z+1=0,z)
```

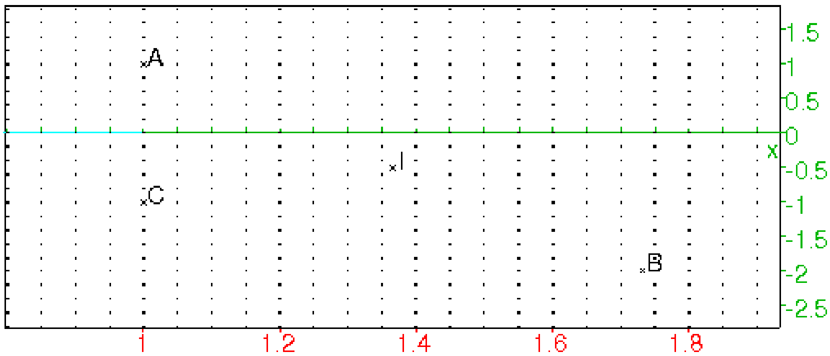
Pour vérifier qu'un nombre est solution d'une équation :

```
f(z):=z^2+1;
f(i)
```

Pour factoriser et développer on utilise `factoriser` et `developper`...
Pour dessiner, on ouvre une fenêtre de géométrie en tapant Alt + G :

```
A:=point(1+i);
B:=point(sqrt(3)-2*i);
I:=milieu(A,B);
affixe(I);
evalc(affixe(I));
C:=point(conj(affixe(A)));
```

et on obtient :



EXERCICES

Énigmes historiques

1 - 1 Résolution d'une équation de degré 3

On veut résoudre l'équation :

$$(\text{E}) \ : \ x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

par la méthode de CARDAN.

a. Soit a un réel et $\text{X} = x - a$. Déterminez a pour que les solutions de (E) soient les solutions d'une équation de la forme $\text{X}^3 + p\text{X} + q = 0$.

b. Résoudre cette nouvelle équation d'inconnue X et en déduire les solutions de (E).

1 - 2 Leibniz se trompe !

Une des conséquences du théorème fondamental de l'algèbre démontré par GAUSS est de pouvoir affirmer que tout polynôme dont les coefficients sont réels peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.

En 1702, le grand LEIBNIZ conjecture pourtant que ce résultat est faux en proposant les égalités suivantes avec a un réel et le fameux $\sqrt{-1}$ que nous n'utilisons plus :

$$\text{X}^4 + 1 = \left(\text{X}^2 - \sqrt{-1}\right)\left(\text{X}^2 + \sqrt{-1}\right)$$
$$= \left(\text{X} + \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(\text{X} - \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(\text{X} + \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(\text{X} - \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

Que pensez-vous des solutions de l'équation $\text{X}^4 + 1 = 0$?

LEIBNIZ affirme alors que, quels que soient les deux facteurs qu'on regroupe, cela ne donnera jamais un facteur réel.

Cette utilisation du symbole $\sqrt{}$ est décidément trompeuse. Menez l'enquête en évitant les $\sqrt{}$ et en utilisant plutôt i.

Exercices stakhanovistes

1 - 3 Puissances de i

Exprimez chacun des nombres suivant comme un élément de l'ensemble $\{-1, +1, -\text{i}, +\text{i}\}$:

a. i^3 **b.** i^4 **c.** i^6 **d.** i^9 **e.** i^{16} **f.** i^{32}

1 - 4 Formes algébriques

Écrivez les nombres suivant sous forme algébrique :

a. $\text{i}^8 + 3\text{i}^7$

b. $(3+2\text{i}) + (5-\text{i})$

c. $(6-\text{i}) + (4-3\text{i})$

d. $(-2+3\text{i}) + (6-4\text{i})$

e. $(-2-\text{i}) + (-1+7\text{i})$

f. $(a+\text{i}b) + (c+\text{i}d)$

g. $(6-2\text{i}) - 4$

h. $(a+\text{i}b) - (2-3\text{i})$

i. $(3+\text{i})(2+4\text{i})$

j. $(1-\text{i})(2+3\text{i})$

k. $(2-\text{i})(3+2\text{i})$

l. $(1-4\text{i})^2$

m. $(2+\text{i})^3$

n. $\frac{1}{2-3\text{i}}$

o. $\frac{2+\text{i}}{1-2\text{i}}$

p. $\frac{3+2\text{i}}{2-3\text{i}}$

q. $\frac{2\text{i}}{2+\text{i}}$

r. $\frac{3-2\text{i}}{\text{i}}$

s. $\frac{1}{\text{i}}$

t. $1+\text{i}-3\text{i}^2+\text{i}^7$

u. $\frac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{-1-\text{i}\sqrt{3}}$

v. $\left(-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

w. $(-1+\text{i})^4$

x. $\left(\frac{2+3\text{i}}{5+\text{i}}\right)^4$

y. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\text{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^8$

z. $\left(\frac{\sqrt{6}-\text{i}\sqrt{2}}{2(1-\text{i})}\right)^{12}$

1 - 5 Formes algébriques

On pose $z_1 = 3-\mathrm{i}$, $z_2 = 1+2\mathrm{i}$, $z_3 = -2\mathrm{i}$. Écrivez sous forme algébrique :

a. $3z_1$

b. $z_1 - z_3$

c. $2z_1 + z_2$

d. $2z_2 + \mathrm{i}z_3$

e. $\mathrm{i}(z_2 z_3)$

f. $\mathrm{i}z_1 + \mathrm{i}z_2$

g. $z_1 + \overline{z_2}$

h. $\mathrm{i}z_1 + \overline{z_3}$

i. $z_1\overline{z_2}$

j. $\mathrm{i}z_1^2 + \frac{z_2}{z_3}$

k. $(z_1 + \overline{z_2}^2)^2$

l. $z_3\left(z_1 + \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\right)^2$

m. $(z_1 + \overline{z_2}^2 + \frac{\mathrm{i}}{z_1+z_3})^2$

n. $z_1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{\mathrm{i}z_1}$

1 - 6 Équations

Déterminez les valeurs des réels x et y ou la forme algébrique du complexe z satisfaisant les équations suivantes :

a. $x+\mathrm{i}y = (2-3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$

b. $(x+\mathrm{i}y)+3(2-3\mathrm{i}) = 6-10\mathrm{i}$

c. $2x+\mathrm{i}y = 6$

d. $(x+\mathrm{i}y)(5+\mathrm{i}) = 3-2\mathrm{i}$

e. $(x+\mathrm{i}y)(2+\mathrm{i}) = (1-\mathrm{i})^2$

f. $(2-\mathrm{i})x-(1+3\mathrm{i})y-7 = 0$

g. $x^2+2xy\mathrm{i}+y^2 = 10+6\mathrm{i}$

h. $(x+\mathrm{i}y)^2 = 8-6\mathrm{i}$

i. $(x+\mathrm{i}y)^2 = 5+12\mathrm{i}$

j. $(x+\mathrm{i}y)^2 = -3+4\mathrm{i}$

k. $\frac{2}{z} = \frac{1}{2-\mathrm{i}} + \frac{1}{1+2\mathrm{i}}$

l. $\frac{x}{1+\mathrm{i}} + \frac{y}{1+2\mathrm{i}} = 1$

m. $\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + x\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}$

1 - 7 Modules

Calculez les modules suivants :

a. $|-3+4\mathrm{i}|$

b. $|6-8\mathrm{i}|$

c. $|5+\mathrm{i}|$

d. $|-3\mathrm{i}|$

e. $\left|\sqrt{2}+\mathrm{i}\right|$

f. $\left|\sqrt{2}+1\right|$

g. $\left|\frac{1}{4+3\mathrm{i}}\right|$

h. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right|$

i. $\left|-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}\right|$

j. $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|$

k. $\left|\frac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|$

1 - 8 Modules

a. Sachant que $z_1 = -3-2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1-3\mathrm{i}$ calculez : $|z_1|$; $|z_1 - z_2|$; $|z_1 + 2z_2|$; $|z_1 z_2|$

b. Sachant que $z_1 = 5+\mathrm{i}$ et $z_2 = -2+3\mathrm{i}$, vérifiez que

$$|z_1|^2 = 2|z_2|^2$$

c. Soit $k \in \mathbb{R}$, $z_1 = -1+8\mathrm{i}$, $z_2 = (1-k)+7\mathrm{i}$. Déterminez les valeurs de k telles que $|z_1| = |z_2|$.

d. Soit $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y des réels. Montrez que :

$$|z-2\mathrm{i}| - |z-1| \Leftrightarrow 2x-4y+3 = 0$$

e. Résolvez dans $\mathbb{R}$ $|11+2\mathrm{i}| = |x+1+5\mathrm{i}|$.

f. Résolvez dans $\mathbb{C}$ $\sqrt{5}|z| + \mathrm{i}z = 3+\mathrm{i}$.

1 - 9 Équations de degré 2 ou 3

a. Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 + 6z+10 = 0$; $z^2-2z+2 = 0$
$2z^2-2z+5 = 0$; $z^2-6z+10 = 0$
$z^2+1 = 0$; $z^2+z+1 = 0$
$z^2 - \mathrm{i}\sqrt{2}z - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

b. Vérifiez que $5+\mathrm{i}$ est solution de $z^2-10z+26 = 0$ puis déterminez la deuxième solution.

c. Déterminez des équations du second degré telles que les nombres suivants en soient les solutions :
$\pm 2\mathrm{i}$; $1\pm 2\mathrm{i}$; $3\pm 2\mathrm{i}$; $-2\pm \mathrm{i}\sqrt{5}$

d. Si $3-2\mathrm{i}$ est une solution de $z^2+kz+13 = 0$ où k est un réel, déterminez k et trouvez l'autre solution de l'équation.

e. L'équation $2z^2-(7-2\mathrm{i})z+k = 0$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez k puis la deuxième solution de l'équation.

f. Si $-1-2\mathrm{i}$ est une solution de $z^2+az+b = 0$, déterminez les réels a et b.

g. L'équation $z^2+(-3+2\mathrm{i})z+k-\mathrm{i} = 0$ où $k \in \mathbb{R}$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez k et la deuxième solution de l'équation.

h. L'équation $z^2+(p+5\mathrm{i})z+q(2-\mathrm{i}) = 0$ admet $1+2\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez p et q ainsi que l'autre solution de l'équation.

i. L'équation $z^3-4z^2+6z-4 = 0$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Trouvez les deux autres solutions.

j. Idem avec $2z^3-9z^2+30z-13=0$ et $2+3\mathrm{i}$.

k. Idem avec $z^3-8z^2+22z-20=0$ et 2.

l. Idem avec $z^3-4z^2+6z-4=0$ et $1-\mathrm{i}$.

m. Idem avec $z^3-\mathrm{i}z^2-z+\mathrm{i}=0$ et i

n. Idem avec $z^3-4z^2+4z+k=0$ et $1-3\mathrm{i}$ en commençant par déterminer le réel k.

o. Idem avec $z^3+kz^2+z+34=0$ et $4-\mathrm{i}$.

p. Factorisez z^3-1 par $z-1$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-1=0$.

q. Factorisez $z^3+(3+\mathrm{i})z^2-4z-12-4\mathrm{i}$ par z^2-4 puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+(3+\mathrm{i})z^2-4z-12-4\mathrm{i}=0$.

1 - 10 Formes trigonométriques

Déterminez les formes trigonométriques des nombres suivants :

a. $1+\mathrm{i}$

b. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$

c. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

d. $5\mathrm{i}$

e. $-4\mathrm{i}$

f. $-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$

g. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

h. $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

i. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2$

j. $\frac{2}{-1+\mathrm{i}}$

k. $\frac{-2}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$

l. $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$

m. $\frac{1}{(1-\mathrm{i})^2}$

1 - 11 Formes trigonométriques

Déterminez les formes algébriques des nombres suivants :

a. $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b. $5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

c. $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

d. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

e. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

f. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

g. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

h. $\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)\right)\left(5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)\right)$

i. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

j. $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

k. $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

l. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$

m. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^7$

n. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^8$

o. $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3$

p. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^5$

q. $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$

r. $(1-\mathrm{i})^4$

s. $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$

t. $(-2-2\mathrm{i})^4$

u. $(1+\mathrm{i})^8$

v. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^6$

1 - 12 Jouons aux cubes

Développez $(a+b)^3$ puis écrivez le plus simplement possible :

a. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3$

b. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3$

c. $\left(\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)^3$

d. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)^3$

e. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^3$

1 - 13 Lignes trigonométriques

Écrivez sous forme trigonométrique

$$z=\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}$$

puis sous forme algébrique et déduisez-en $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1 - 14 Équation dans C

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1}=1+\mathrm{i}.$$

1 - 15 Système d'équations dans C

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases}2z_1+z_2=4\\-2\mathrm{i}z_1+z_2=0\end{cases}$$

1 - 16 Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}, \qquad z_2 = 2 - 2\mathrm{i}, \qquad \mathrm{A} = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne lme nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.

b. En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.

c. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

d. Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

1 - 17 Racine carrée dans C

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$$

1 - 18 Équation à coefficients dans R

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

1 - 19 Équation à coefficients dans C

a. Calculer $(3-2\mathrm{i})^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + z - 1 + 3\mathrm{i} = 0.$$

b. Calculer $(5-3\mathrm{i})^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (5-\mathrm{i})z + 2 + 5\mathrm{i} = 0.$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (5+3\mathrm{i})z + 10 + 5\mathrm{i} = 0.$$

1 - 20 Ligne de niveau

a. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $|z-3| = 2$?

b. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $\arg(z - (3-\mathrm{i})) = \pi/3$?

c. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que

$$z = 1 - \mathrm{i}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}$$

où L et C sont deux contantes réelles strictement positives et où est un réel variant dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

ROC

1 - 21 Amérique du Sud, novembre 2006

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u},\ \vec{w})$ ».
Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)$.

b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

1 - 22 Centres étrangers, juin 2007

a. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

b. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

c. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

1 - 23 Amérique du Nord, juin 2006

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

- pour tout nombre complexe z non nul

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

1 - 24 Métropole 15 juin 2006

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z)+\arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

– Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

1 - 25 Asie juin 2006

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

1 - 26 Centres étrangers, juin 2006

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près}\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0\end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

à 2π près

Exercices originaux

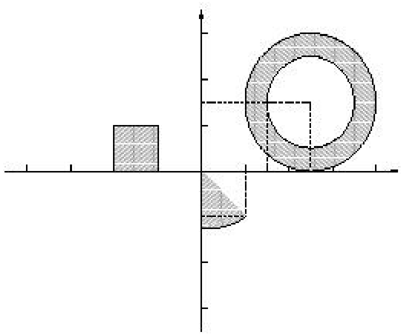
1 - 27 Problème ouvert

En utilisant les racines carrées de $1+\mathrm{i}$, trouver une méthode pour obtenir une formule donnant $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Trouvez au moins deux autres méthodes de calcul en utilisant des formules trigonométriques.

1 - 28 Du dessin aux formules

Caractérisez les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :

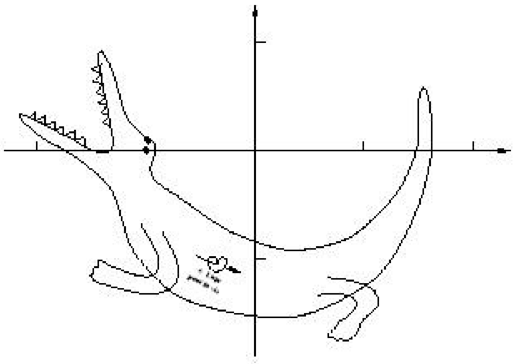


1 - 29 Le crocodile se mord la queue...

...ou comment visualiser une multiplication complexe sur une pauvre bête ?

On voudrait comprendre « quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré ». Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$



a. Écrivez les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?

b. Dessinez une demi-droite issue de 0 et son image par φ.

c. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placez aussi les images de quelques points particuliers du cercle.

d. « Dessinez l'image du crocodile ».

e. (plus facile) Dessinez de même l'image du croco par $z \mapsto z+1+2\mathrm{i}$, $z \mapsto (\sqrt{3}+\mathrm{i})z$.

1 - 30 Les fractales

Les fractales sont des objets irréguliers dont l'étude a débuté il y a une trentaine d'années. Elles interviennent dans de nombreux domaines : modélisation des matériaux poreux et des semi-conducteurs, description mathématique de la surface d'un nuage, étude des mécanismes financiers, infographie, c'est à dire création d'algorithmes efficaces pour représenter des objets sur un écran d'ordinateur (avec un minimum de données transmises).
Nous allons étudier deux fractales simples : le tamis et le tapis de Sierpinski.

1 - 31 Dessin du tamis de Sierpinski

Considérons les trois transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\mathrm{T}_1(z) = \frac{1}{2}z \qquad \mathrm{T}_2(z) = \frac{1}{2}z+\frac{1}{2} \qquad \mathrm{T}_3(z) = \frac{1}{2}z+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$$

Soit E_0 le triangle de sommets d'affixes 0, 1 et $1/2+\mathrm{i}$.

a. Dessiner E_0.

b. Dessiner $\mathrm{E}_1 = \mathrm{T}_1(\mathrm{E}_0) \cup \mathrm{T}_2(\mathrm{E}_0) \cup \mathrm{T}_3(\mathrm{E}_0)$

c. Dessiner $\mathrm{E}_2 = \mathrm{T}_1(\mathrm{E}_1) \cup \mathrm{T}_2(\mathrm{E}_1) \cup \mathrm{T}_3(\mathrm{E}_1)$

$\vdots$

Si nous voulons transmettre ces dessins informatiquement, il est impossible de donner les coordonnées des sommets de tous les triangles noircis du tamis puisqu'il y en a une infinité. En fait, il suffit de donner E_0, T_1, T_2 et T_3 et le tour est joué. C'est ce qui est utilisé sur internet.
Un autre problème : quelle est la resistance électrique du tapis ?

1 - 32 Dessin du tapis de Sierpinski

E_0 est le carré unité.

$$\mathrm{T}_1(z) = \frac{1}{3}z \qquad \mathrm{T}_2(z) = \frac{1}{3}z+\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{T}_3(z) = \frac{1}{3}z+\mathrm{d}t \qquad \mathrm{T}_4(z) = \frac{1}{3}z+\mathrm{d}t+\frac{1}{3}i$$

$$\mathrm{T}_5(z) = \frac{1}{3}z+\mathrm{d}t+\mathrm{d}ti \qquad \mathrm{T}_6(z) = \frac{1}{3}z+\frac{1}{3}+\mathrm{d}ti$$

$$\mathrm{T}_7(z) = \frac{1}{3}z+\mathrm{d}ti \qquad \mathrm{T}_8(z) = \frac{1}{3}z+\frac{1}{3}i$$

Complexes et électronique

1 - 33 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\mathrm{R})+\underline{Z}_2\mathrm{R}},$$

avec $\mathrm{R}=900$, $\underline{Z}_1 = 1\,100j$, $\underline{Z}_2 = -600j$.
Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

1 - 34 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

avec $\underline{Z}_1 = 1 + 2j$, $\underline{Z}_2 = -1 + 3j$ et $\underline{Z}_3 = 4 + 5j$.
Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

1 - 35 Fonction de transfert

En électronique, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation , définie quand décrit l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\underline{T}() = \frac{1}{1 + j}.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel de $[0, +\infty[$, on a :

$$\underline{T}() = \frac{1 - j}{1 + ^2}.$$

b. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité 20 cm (ou 20 grands carreaux). Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives

$\underline{T}(0)$, $\underline{T}(0,3)$, $\underline{T}(0,5)$, $\underline{T}(1)$

$\underline{T}(2)$, $\underline{T}(3)$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel de $[0, +\infty[$, le point M d'affixe $\underline{T}()$ est situé sur le demi-cercle inférieur de diamètre [OA].

d. Quel est l'ensemble des points m d'affixe $1 - j$ quand varie dans $[0, +\infty[$?

1 - 36 Fonction de transfert bis

En électronique, sur un montage, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation , définie quand décrit l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\underline{T}() = \frac{4}{(1 + j)^3}.$$

a. Calculer

$\underline{T}(0)$, $\underline{T}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\underline{T}(1)$, $\underline{T}(\sqrt{3})$.

b. On modifie le montage précédent et on obtient alors la « nouvelle fonction de transfert » $\underline{H}$ définie par :

$$\underline{H}() = \frac{\underline{T}()}{1 + \underline{T}()}$$

Calculer les modules et argument de $\underline{H}(0)$, $\underline{H}(1)$ et $\underline{H}(\sqrt{3})$.

c. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $\underline{T}()$.

d. Montrer que le module de $\underline{H}()$ est égal à MO/MA.

e. Montrer qu'un argument de $\underline{H}()$ est égal à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}})$.

f. Utiliser les questions **4.** et **5.** pour retrouver les résultats du **2.**

1 - 37 Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe $1/z$. On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z et $x' + iy'$ celle de l'affixe z' de M′.

a. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

b. Quelle est l'image de M′ par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.

c. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.

d. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

1 - 38 Étude d'un filtre

On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation , on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation.

Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$\mathrm{T}() = \frac{1}{1+\frac{\mathrm{Z}_1()}{\mathrm{Z}_2()}} \quad \text{avec}$$

$$\mathrm{Z}_1) = \mathrm{R} + \frac{1}{j\mathrm{C}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_2() = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R}} + j\mathrm{C}}$$

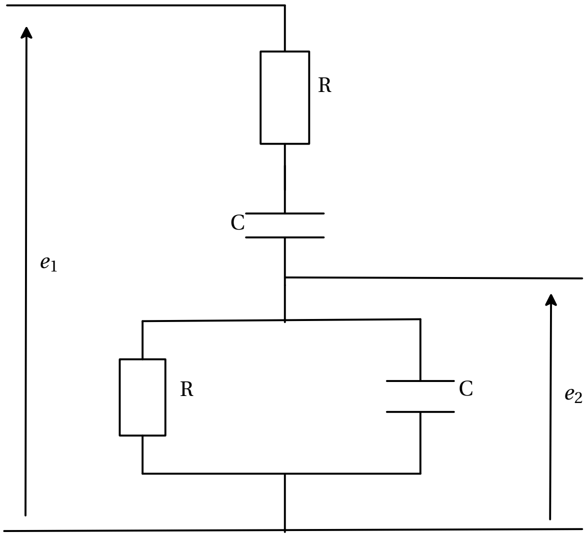


FIGURE 1.1: Filtre

Justifiez les valeurs trouvées de Z_1 et Z_2

Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives. En électronique, on note j le nombre vérifiant $\mathrm{j}^2 = -1$ pour ne pas faire de confusion avec l'intensité i.

a. Montrez que $\mathrm{T}() = \dfrac{1}{3 + j\left(\mathrm{RC} - \frac{1}{\mathrm{RC}}\right)}$

b. **i.** On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h() = \mathrm{RC} - \frac{1}{\mathrm{RC}}$$

Dressez le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$.

ii. On considère le point m d'affixe $3 + jh()$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque parcourt $]0, +\infty[$?

iii. Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $\mathrm{Z} = \mathrm{T}()$?

iv. Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand parcourt $]0, +\infty[$.

v. Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm.

Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3 + \mathrm{j}$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

Des exercices de Bac

1 - 39 Équations - systèmes

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

i. $\dfrac{z+2}{z+2\mathrm{i}} = i$

ii. $2z + \mathrm{i}\overline{z} = 5 - \mathrm{i}$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} 2\mathrm{i}z + z' &= 2\mathrm{i} \\ 3z - \mathrm{i}z' &= 1 \end{cases}$

1 - 40 Équations coeff complexes

a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

b. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

$$(\mathrm{F}) : z^2 - 2z + 4 + 4\mathrm{i} = 0$$

c. Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

d. Résoudre l'équation (F).

1 - 41 Équation de degré 4

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

c. Placer dans un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4\mathrm{i}$, $n = -2 - 4\mathrm{i}$, $p = 2 + 3\mathrm{i}$ et $q = 2 - 3\mathrm{i}$.

d. **i.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m}=i$. Placer son image K.

ii. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

e. **i.** Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

iii. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

1 - 42 Style Bac

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.
On note A et B les points d'affixes respectives 2i et -1.
À tout nombre complexe z, distinct de 2i, on associe le nombre complexe $\mathrm{Z}=\dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$.

a. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z\neq-1$.

b. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants

i. L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.

ii. L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

1 - 43 Le QCM de la mort

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Vous avez 1 point par bonne réponse. J'enlève 0,5 point par réponse inexacte.

a. Soit $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $\bar{z}+|z|=6+2\mathrm{i}$. La forme algébrique de z est

○ $\dfrac{8}{3}-2\mathrm{i}$ ○ $-\dfrac{8}{3}-2\mathrm{i}$

○ $\dfrac{8}{3}+2\mathrm{i}$ ○ $-\dfrac{8}{3}+2\mathrm{i}$

b. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation :

○ $y=x-1$ ○ $y=-x$

○ $y=-x+1$ ○ $y=x$

c. Soit $n\in\mathbb{N}$. Le nombre $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si

○ $n\equiv1[3]$ ○ $n\equiv2[3]$

○ $n\equiv0[3]$ ○ $n\equiv0[6]$

d. Soit l'équation $z=\dfrac{6-z}{3-z}$, $z\in\mathbb{C}$. Une de ses solutions est

○ $-2-\sqrt{2}i$ ○ $2+\sqrt{2}i$

○ $1-\mathrm{i}$ ○ $-1-\mathrm{i}$

e. Soit A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=i$ et $z_{\mathrm{B}}=\sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. L'affixe z_{C} du point de C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\pi/3$ est

○ $-\mathrm{i}$ ○ $2\mathrm{i}$

○ $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ ○ $\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

f. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\mathrm{i}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est

○ une droite ○ un cercle

○ une lemniscate de Bernoulli

○ une bergère syldave

1 - 44 Bac

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthononal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

a. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

i. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

ii. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ tels que $f(M) = M$.

iii. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M′ est aussi distinct de O, U et V.
Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-i} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$.
En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$

b. **i.** Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

ii. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

1 - 45 VRAI ou FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

a. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.

b. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

c. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

d. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

1 - 46 Une impression de Déjà-Vu

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ à 2π près.
On note A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $3i$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{iz+3}{z+i}$$

a. étude de quelques cas particuliers.

i. Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].
Placer ces points sur le dessin.

ii. On note C le point d'affixe $c = -2 + i$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

b. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
$\arg(z') = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

c. Étude de deux ensembles de points.

i. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.

ii. Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M′ ?

1 - 47 Géométrie complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

c. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.

d. **i.** Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

ii. Exprimer $\left|z'\right|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

iii. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P$'$ par f.

e. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$,distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

1 - 48 QCM

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève 0,5 point; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

a. Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

i. $|z-2+5\mathrm{i}|^2 = 3$;

ii. $|z+2-5\mathrm{i}|^2 = 3$;

iii. $|z-2+5\mathrm{i}| = 3$.

b. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

i. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

ii. M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;

iii. M est l'orthocentre du triangle ABC.

c. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$ et $5+4\mathrm{i}$

i. $|z_{\mathrm{G}}-3-2,5\mathrm{i}| = \dfrac{5}{6}$;

ii. $z_{\mathrm{G}}-(1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$;

iii. $z_{\mathrm{G}}-(3+2,5\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$.

1 - 49 QCM : on aime !

Pour chacune des trois questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

a. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2,08+1,98\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle

(b) : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle

(d) : ni rectangle ni isocèle

b. à tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1

(b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point

(d) : un cercle privé d'un point

c. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle

(b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point

(d) : un cercle privé d'un point

1 - 50 Bac

I. Étude d'un cas particulier
On pose : $a = 3 + \mathrm{i}$, $b = -1 + 3\mathrm{i}$, $c = -\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

a. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

b. Placer les points A, B, C et le point H d'aflixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

II. Étude du cas général.
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

a. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

b. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

i. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

ii. Verifier l'égalité : $(b + c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b + c}{b - c} = \dfrac{w}{|b - c|^2}$.

iii. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b + c}{b - c}$ est imaginaire pur.

c. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

i. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

ii. Prouver que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
(On admet de même que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

iii. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

1 - 51 Une petite équation

On considère l'équation :

$$(\mathrm{E}) \quad z^3 - (4 + \mathrm{i})z^2 + (13 + 4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = 0$$

où z est un nombre complexe.

a. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

b. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = (z - \mathrm{i})\left(az^2 + bz + c\right).$$

c. En déduire les solutions de l'équation (E).