Épisode 1

1. On trace un carré de côté 10 cm. On place le milieu I de [AB]. On trace l'arc de cercle de centre I passant par C : il coupe la demi-droite [AB] en E. On trace le rectangle CBEF.
2. Le triangle IBC est rectangle en B. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{IC}^2 = \mathrm{IB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$$

   On en déduit que $\mathrm{IC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ puis que $\mathrm{AE} = \mathrm{AI} + \mathrm{IE} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
3. On mesure sur le dessin $\mathrm{AE} \approx 16,2$ cm, donc $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,62$. On obtient une mesure au millimètre près sur le dessin, c'est-à-dire à 10^{-2} près pour $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
4. On obtient à la machine une valeur approchée :

```
approx((sqrt(5)+1)/2)
```

1.618034

Épisode 2

Sans calculatrice

1. $\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   $1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$

   En utilisant un calculateur formel (XCAS en l'occurrence, téléchargeable ici http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/%7Eparisse/install_fr#xcaswin) :

```
Fi:=(1+sqrt(5))/2 // sqrt comme SQuare RooT
```

$$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

```
simplifier(1/Fi)
```

$$\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

```
simplifier(1/Fi+1)
```

$$\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$$

2. De même :

```
simplifier(Fi^2)
```

$$\frac{(\sqrt{5}+3)}{2}$$

```
simplifier(1+Fi)
```

$$\frac{(\sqrt{5}+3)}{2}$$

Avec calculatrice

1. Cherchons les approximations demandées

   Avec une calculatrice on entre :

   [√][2][ENTER]puis une série de : [√][(][1][+][ANS][)][ENTER]

   Sur XCAS :

```
approx(Fi)
```

1.618034

```
a1:=sqrt(1+sqrt(1));approx(a1)
```

$$\sqrt{2}, 1.414214$$

```
a2:=sqrt(1+a1);approx(a2)
```

$$\sqrt{1+\sqrt{2}}, 1.553774$$

```
a3:=sqrt(1+a2);approx(a3)
```

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, 1.598053$$

```
a4:=sqrt(1+a3);approx(a4)
```

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}, 1.611848$$

```
a5:=sqrt(1+a4);approx(a5)
```

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}, 1.616121$$

```
a6:=sqrt(1+a5);approx(a6)
```

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}}, 1.617443$$

etc.

On trouve finalement qu'il faut aller jusqu'à a_{18}.

```
precision(n):={
A:=sqrt(1+sqrt(1.0)); // au depart A vaut a1
k:=1; // le compteur au debut vaut 1
Fi:=approx((1+sqrt(5))/2);
tantque Fi-A>10^(-n) faire A:=sqrt(1+A); // on
    fabrique un nouveau A
k:=k+1; // un coup de plus au compteur
ftantque; // fin de la boucle
return("Il faut attendre le rang"+k)
}:;
```

```
precision(9)
```

Il faut attendre le rang18

```
b1:=approx(1+1/1)
```

2.000000

```
b2:=1+1/b1
```

1.500000

```
b3:=1+1/b2
```

1.666667

```
b4:=1+1/b3
```

1.600000

```
b5:=1+1/b4
```

1.625000

```
b6:=1+1/b5
```

1.615385

etc.

On trouve finalement qu'il faut aller jusqu'à b_{22}.

Pour plus de précisions sur le nombre d'Or, regardez http://www.youtube.com/watch?v=ciwcfXHax9c