Équations différentielles

IUT SGM 1

Mars 2006

Sommaire

Sommaire

Définition

Définition

Soit f une fonction de trois variables. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme

$$f(y', y, x) = 0$$

avec y une fonction dérivable de la variable x et de dérivée y'

Exemples

Exemple

$y' = 3y$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y', y, x) = 0$ en posant

$$f \ : \ (X, Y, Z) \mapsto X - 3Y$$

Exemple

En terminale, vous avez étudié un cas particulier d'équations différentielles : les équations différentielles linéaires à coefficients constants du type

$$y' = ay + b, \qquad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Exemples

Exemple

$y' = 3y$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y', y, x) = 0$ en posant

$$f \ : \ (X, Y, Z) \mapsto X - 3Y$$

Exemple

En terminale, vous avez étudié un cas particulier d'équations différentielles : les équations différentielles linéaires à coefficients constants du type

$$y' = ay + b, \qquad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Exemples

Exemple

$y' = 3y$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y', y, x) = 0$ en posant

$$f \ : \ (X, Y, Z) \mapsto X - 3Y$$

Exemple

En terminale, vous avez étudié un cas particulier d'équations différentielles : les équations différentielles linéaires à coefficients constants du type

$$y' = ay + b, \qquad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Sommaire

Équation $y' = ay$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a un réel donné) sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

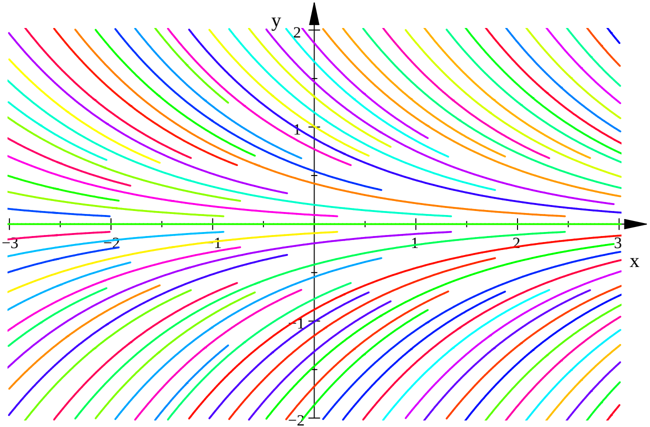
Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

$(E_1) \iff y' = -\dfrac{2}{3}y$, donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$y \ : \ x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2x/3}$$

Interprétation graphique



Unicité de la solution

Pour assurer l'unicité des solutions, nous avons besoin du théorème de CAUCHY qui fait appel à la notion de continuité d'une fonction de plusieurs variables, donc hors de notre portée.
Par la suite nous retiendrons que si l'on peut écrire l'équation différentielle sous la forme $y' = f(x, y)$ avec f « suffisamment régulière » sur un intervalle ouvert contenant x_0, alors il existe une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$

Unicité de la solution

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 1$

La fonction $f \ : \ (x, y) \mapsto -\dfrac{2}{3}y$ est « assez régulière » sur $\mathbb{R}$.
Nous savons déjà que les solutions sont les fonctions de la forme $y \ : \ x \mapsto \lambda e^{-2x/3}$. Donc $y(0) = 1 = \lambda$.

Sommaire

Équations linéaires

Définition

Une équation différentielle linéaire du 1^er ordre est une équation de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

avec a, b et f des fonctions continues sur un même intervalle I.

Équation sans second membre

Définition

L'équation sans second membre associée à $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ est

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

avec λ un réel

Équation sans second membre

Définition

L'équation sans second membre associée à $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ est

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

avec λ un réel

Équation sans second membre

Définition

L'équation sans second membre associée à $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ est

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

avec λ un réel

Exemples

- Résoudre l'équation différentielle $y' - y\sin x = 0$
- Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + y = 0$

Exemples

- Résoudre l'équation différentielle $y' - y \sin x = 0$
- Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' + y = 0$

Exemples

- Résoudre l'équation différentielle $y' - y \sin x = 0$
- Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' + y = 0$

Théorème

Pour obtenir la solution générale de l'équation

$$(E)\ :\ a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

on ajoute la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière de (E).

Variation de la constante

Nous savons résoudre l'équation sans second membre : le problème sera souvent de trouver une solution particulière.

Règle pratique

Si $x \mapsto \lambda\varphi(x)$ est la solution générale de l'équation sans second membre, on cherche des solutions de l'équation différentielle sous la forme

$$y(x) = \lambda(x)\varphi(x)$$

où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction dérivable de la variable x.

Variation de la constante

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $xy' - 2y = x^3 e^x$
- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$

Variation de la constante

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $xy' - 2y = x^3 e^x$
- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$

Variation de la constante

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $xy' - 2y = x^3 e^x$
- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$

Sommaire

Équation de Bernoulli

Définition

Une équation de Bernoulli est une équation de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = y^a f(x) \qquad \text{avec} a \neq 1$$

Une telle équation se résout en posant $z = y^{1-a}$

Équation de Bernoulli

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $2xy^2 - y + xy' = 0$

Équations à variables séparables

Définition

C'est une équation de la forme

$$a(x) = y' b(y)$$

Règle pratique

On écrit l'équation sous la forme $a(x)\,dx = b(y)\,dy$ qui se traduit par

$$\int a(x)\,dx = \int b(y)\,dy$$

Équations à variables séparables

Définition

C'est une équation de la forme

$$a(x) = y' b(y)$$

Règle pratique

On écrit l'équation sous la forme $a(x)\,dx = b(y)\,dy$ qui se traduit par

$$\int a(x)\,dx = \int b(y)\,dy$$

Équations à variables séparables

Définition

C'est une équation de la forme

$$a(x) = y'b(y)$$

Règle pratique

On écrit l'équation sous la forme $a(x)\,dx = b(y)\,dy$ *qui se traduit par*

$$\int a(x)\,dx = \int b(y)\,dy$$

Équations à variables séparables

Exemple

Résoudre $y' = \mathrm{e}^{x+y}$

Sommaire

Définition

Définition

Soit f une fonction de quatre variables. On appelle équation différentielle du deuxième ordre une équation de la forme

$$f(y'', y', y, x) = 0$$

avec y une fonction deux fois dérivable de la variable x, de dérivée première y' et de dérivée seconde y''.

Exemples

- $y'' = 3y' - 32y^2 + \sin x$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y'', y', y, x) = 0$ en posant

$$f : (X, Y, Z, T) \mapsto X - 3Y + 32y^2 - \sin x$$

- En physique, vous avez souvent rencontré de telles équations. Ainsi, pour un pendule simple on obtient l'équation

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta$$

Exemples

- $y'' = 3y' - 32y^2 + \sin x$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y'', y', y, x) = 0$ en posant

$$f \ : \ (X, Y, Z, T) \mapsto X - 3Y + 32y^2 - \sin x$$

- En physique, vous avez souvent rencontré de telles équations. Ainsi, pour un pendule simple on obtient l'équation

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta$$

Exemples

- $y'' = 3y' - 32y^2 + \sin x$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y'', y', y, x) = 0$ en posant

$$f \ : \ (X, Y, Z, T) \mapsto X - 3Y + 32y^2 - \sin x$$

- En physique, vous avez souvent rencontré de telles équations. Ainsi, pour un pendule simple on obtient l'équation

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta$$

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
- Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
- Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
- Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
- Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
- Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Sommaire

Il faudra commencer par vérifier si l'équation différentielle ne peut pas être résolue comme une équation différentielle du premier ordre.

Exemples

Équations incomplètes en y Considérons par exemple l'équation $y'' + y' = x$. On se ramène au premier ordre en posant $z(x) = y'(x)$.

Équations incomplètes en x C'est un peu plus délicat. Considérons l'équation $y'' + (y')^2 + yy' = 0$. On pose $z(y) = y'$, alors $y'' = zz'$.

Il faudra commencer par vérifier si l'équation différentielle ne peut pas être résolue comme une équation différentielle du premier ordre.

Exemples

Équations incomplètes en y Considérons par exemple l'équation $y'' + y' = x$. On se ramène au premier ordre en posant $z(x) = y'(x)$.

Équations incomplètes en x C'est un peu plus délicat. Considérons l'équation $y'' + (y')^2 + yy' = 0$. On pose $z(y) = y'$, alors $y'' = zz'$.

Il faudra commencer par vérifier si l'équation différentielle ne peut pas être résolue comme une équation différentielle du premier ordre.

Exemples

Équations incomplètes en y Considérons par exemple l'équation $y'' + y' = x$. On se ramène au premier ordre en posant $z(x) = y'(x)$.

Équations incomplètes en x C'est un peu plus délicat. Considérons l'équation $y'' + (y')^2 + yy' = 0$. On pose $z(y) = y'$, alors $y'' = zz'$.

Sommaire

Équations linéaires

Définition

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre est une équation de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

avec a, b, c et f des fonctions continues sur un même intervalle I.

Remarques

On définit comme dans le cas du premier ordre de l'équation sans second membre. On admettra qu'il est nécessaire et suffisant de connaître deux solutions particulières indépendantes de l'équation sans second membre pour obtenir toutes les solutions qui s'écrivent alors comme combinaison linéaire de ces deux solutions particulières.
Malheureusement, il est assez difficile de résoudre de telles équations. Nous nous contenterons donc de l'étude des équations à coefficients constants.

Sommaire

Équations linéaires à coefficients constants

Définition

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec a, b, c des réels et f une fonction continue sur un intervalle I.

Sommaire

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0$$

Il reste à discuter selon le signe du discriminant.

Sommaire

Soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Théorème

$\Delta > 0$ *alors* $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$ *alors* $r_1 = r_2 = r$ *et* $y = e^{rx}(\lambda_1 x + \lambda_2)$

$\Delta < 0$ *alors* $r_{1,2} = a \pm ib$ *et* $y = e^{ax}\left(\lambda_1 \cos(bx) + \lambda_2 \sin(bx)\right)$

Soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Théorème

$\Delta > 0$ *alors* $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$ *alors* $r_1 = r_2 = r$ *et* $y = e^{rx}(\lambda_1 x + \lambda_2)$

$\Delta < 0$ *alors* $r_{1,2} = a \pm ib$ *et* $y = e^{ax}\left(\lambda_1 \cos(bx) + \lambda_2 \sin(bx)\right)$

Soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Théorème

$\Delta > 0$ *alors* $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$ *alors* $r_1 = r_2 = r$ *et* $y = e^{rx}(\lambda_1 x + \lambda_2)$

$\Delta < 0$ *alors* $r_{1,2} = a \pm ib$ *et* $y = e^{ax}\left(\lambda_1 \cos(bx) + \lambda_2 \sin(bx)\right)$

Soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Théorème

$\Delta > 0$ *alors* $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$ *alors* $r_1 = r_2 = r$ *et* $y = e^{rx}(\lambda_1 x + \lambda_2)$

$\Delta < 0$ *alors* $r_{1,2} = a \pm ib$ *et* $y = e^{ax}\left(\lambda_1 \cos(bx) + \lambda_2 \sin(bx)\right)$

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 2y' + 5y = 0$
- $2y'' - 5y' + 3y = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 2y' + 5y = 0$
- $2y'' - 5y' + 3y = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 2y' + 5y = 0$
- $2y'' - 5y' + 3y = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 2y' + 5y = 0$
- $2y'' - 5y' + 3y = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Sommaire

Comme dans le cas du premier ordre

Théorème

Pour obtenir la solution générale de l'équation

$$(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$$

on ajoute la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière de (E).

mais il est plus difficile de trouver une solution particulière, sauf dans quelques cas particuliers à connaître.

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- *n si a, b et c sont tous non nuls ;*
- *$n+1$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$;*
- *$n+2$ si $a \neq 0$ et $b = c = 0$.*

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- *n si a, b et c sont tous non nuls ;*
- *$n+1$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$;*
- *$n+2$ si $a \neq 0$ et $b = c = 0$.*

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- *n si a, b et c sont tous non nuls ;*
- *$n+1$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$;*
- *$n+2$ si $a \neq 0$ et $b = c = 0$.*

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ *avec* P *une fonction polynôme de degré* n*, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré*

- n *si* a, b *et* c *sont tous non nuls ;*
- $n+1$ *si* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *et* $c = 0$ *;*
- $n+2$ *si* $a \neq 0$ *et* $b = c = 0$.

Le second membre est une fonction polynôme

Exemples

Résoudre $y'' - 2y' - 3y = P(x)$ avec

- $P(x) = 2x^2 - 1$
- $P(x) = 2x^2 - x$
- $P(x) = 2x^2$

Le second membre est une fonction polynôme

Exemples

Résoudre $y'' - 2y' - 3y = P(x)$ avec

- $P(x) = 2x^2 - 1$
- $P(x) = 2x^2 - x$
- $P(x) = 2x^2$

Le second membre est une fonction polynôme

Exemples

Résoudre $y'' - 2y' - 3y = P(x)$ avec

- $P(x) = 2x^2 - 1$
- $P(x) = 2x^2 - x$
- $P(x) = 2x^2$

Le second membre est une fonction polynôme

Exemples

Résoudre $y'' - 2y' - 3y = P(x)$ avec

- $P(x) = 2x^2 - 1$
- $P(x) = 2x^2 - x$
- $P(x) = 2x^2$

$f(x)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)e^{mx}$ et on obtient le théorème suivant

Théorème

Après changement de variable $y(x) = z(x)e^{mx}$, l'équation devient

$$az'' + (2am + b)z' + (am^2 + bm + c)z = P(x)$$

On cherche alors z sous la forme d'un polynôme de degré

- *n si $am^2 + bm + c \neq 0$ (m n'est pas racine de l'équation caractéristique) ;*
- *$n+1$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$;*
- *$n+2$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b = 0$.*

$f(x)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)e^{mx}$ et on obtient le théorème suivant

Théorème

Après changement de variable $y(x) = z(x)e^{mx}$, l'équation devient

$$az'' + (2am + b)z' + (am^2 + bm + c)z = P(x)$$

On cherche alors z sous la forme d'un polynôme de degré

- *n si $am^2 + bm + c \neq 0$ (m n'est pas racine de l'équation caractéristique) ;*
- *$n+1$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$;*
- *$n+2$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b = 0$.*

$f(x)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)e^{mx}$ et on obtient le théorème suivant

Théorème

Après changement de variable $y(x) = z(x)e^{mx}$, l'équation devient

$$az'' + (2am+b)z' + (am^2+bm+c)z = P(x)$$

On cherche alors z sous la forme d'un polynôme de degré

- *n si $am^2+bm+c \neq 0$ (m n'est pas racine de l'équation caractéristique) ;*
- *$n+1$ si $am^2+bm+c = 0$ et $2am+b \neq 0$;*
- *$n+2$ si $am^2+bm+c = 0$ et $2am+b = 0$.*

$f(x)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)e^{mx}$ et on obtient le théorème suivant

Théorème

Après changement de variable $y(x) = z(x)e^{mx}$, l'équation devient

$$az'' + (2am + b)z' + (am^2 + bm + c)z = P(x)$$

On cherche alors z sous la forme d'un polynôme de degré

- *n si $am^2 + bm + c \neq 0$ (m n'est pas racine de l'équation caractéristique) ;*
- *$n+1$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$;*
- *$n+2$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b = 0$.*

$f(x)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y'' - y = 2xe^x$

Il peut être pratique de décomposer le second membre en somme de deux fonctions simples.

Théorème

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ pour tout x de I et si y_1 et y_2 sont les solutions respectivement de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et $ay'' + by' + cy = f_2(x)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f(x)$

Cela sera surtout pratique quand le second membre sera du type $P(x)\cos(\omega x)$, cas très fréquent en physique. Il suffira alors de revenir au dernier cas étudié en introduisant les seconds membres $P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ puis $P(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$. Il restera à faire la demi somme des solutins particulières trouvées puisque $\cos(\omega x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}$

Exemple

Résoudre $y'' + 4y = 2x\cos(2x)$