Baccalauréat obligatoire et spé Juin 2006
CORRIGÉ

EXERCICE 1 **5 points**

1. VRAI : on vérifie que les coordonnées des 3 points conviennent (on vérifie aussi que (ABC) est un plan en calculant les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$: non colinéaires)
2. FAUX : $\overrightarrow{\text{DE}}(2\,;2\,;1)$ n'est pas colinéaire à un vecteur normal à (ABC) $\overrightarrow{n}\,(2\,;2\,;-1)$
3. VRAI : $\overrightarrow{\text{AB}}(-2\,;0\,;-4)$, $\overrightarrow{\text{CD}}(-2\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}=0$
4. FAUX : D n'appartient pas à la droite dont la représentation paramétrique est donnée : $1=-1+2t \iff t=1$, mais alors $z=1-1=0\neq z_{\text{D}}$
5. VRAI : $\overrightarrow{\text{AI}}\left(-\dfrac{7}{5}\,;0,\,;-\dfrac{14}{5}\right)$ donc $\overrightarrow{\text{AI}}=\dfrac{7}{10}\overrightarrow{\text{AB}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{1-x}=+\infty$, donc par produit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty)$$

$f(x)=\mathrm{e}\times x^2\mathrm{e}^{-x}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}-x=0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

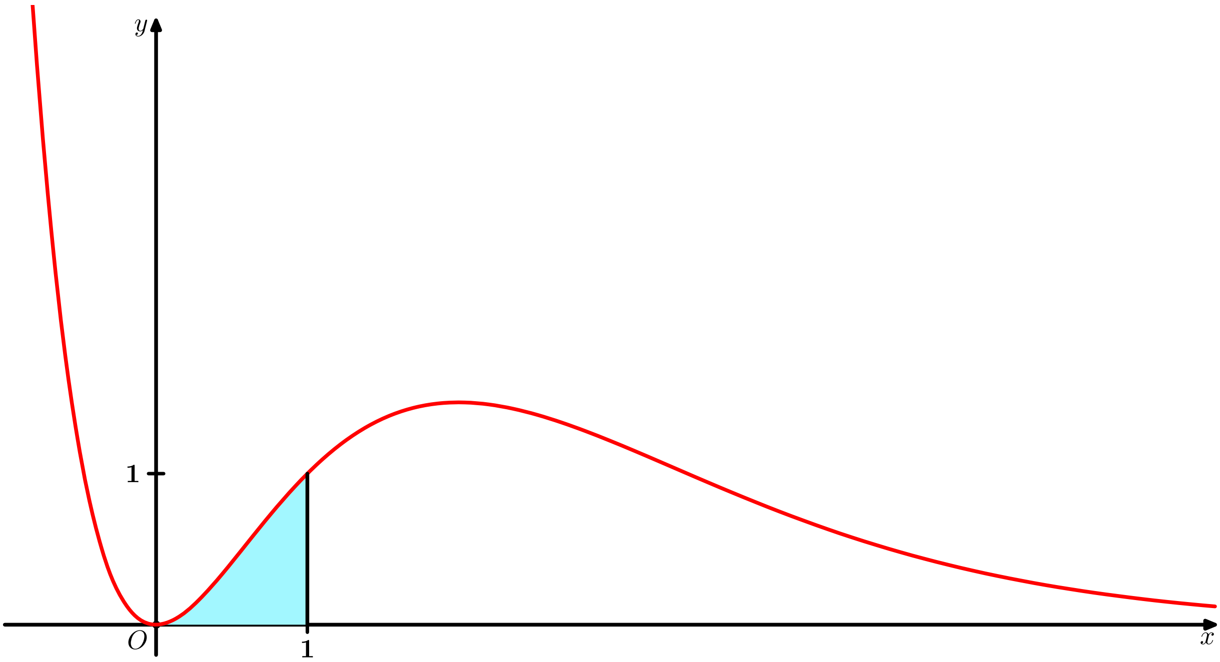
On en déduit que $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=(2-x)x\mathrm{e}^{1-x}$$

c) Donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/\mathrm{e}$	$\searrow$	0



2. a) Classique : on effectue une IPP de I_{n+1} $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{1-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \end{cases}$ et on obtient

$$\mathrm{I}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathrm{I}_n$$

b) On intègre I_1 par parties $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{1-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \end{cases}$ et on obtient

$$\mathrm{I}_1 = -1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x} = -1 - 1 + \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2$$

puis,

$$\mathrm{I}_2 = -1 + 2\mathrm{I}_1 = 2\mathrm{e} - 5$$

c) $\mathrm{I}_2 = \int_0 1 f(x)\,\mathrm{d}x$: c'est donc l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ et la courbe d'équation $y = f(x)$

3. a) (I) : $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\iff 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$

$\iff 1 \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}$

$\iff x^n \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}x^n$

b) On intègre alors membre à membre la double inégalité précédente et on obtient

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = 0$$

EXERCICE 3 NON SPÉ **5 points**

1. Voir cours...

2. a) $\operatorname{Arg}(z') = -\operatorname{Arg}\overline{z} = -\left(-\operatorname{Arg} z\right) = \operatorname{Arg} z$ le reste est immédiat.

b) $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff z = 1/\overline{z} \iff z\overline{z} = 1 \iff |z|^2 = 1$, donc l'ensemble des points invariants est le cercle unité.

c) $\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{\overline{z}}-1}{\frac{1}{\overline{z}}-\mathrm{i}} = \dfrac{1-\overline{z}}{1-\mathrm{i}\overline{z}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\left(\overline{\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}}\right) =$ ce qu'il faut...

Alors $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Arg}(-\mathrm{i}) + \operatorname{Arg}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)} = -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. a) M est sur la droite (UV) privée de U et V si, et seulement si, il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{\mathrm{UM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{VM}}$, c'est à dire $(z - z_{\mathrm{U}}) = \lambda(z - z_{\mathrm{V}})$ d'où le résultat.

b) D'après la question 2-c, et avec les notations usuelles, l'affixe z' de M$'$ vérifie

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} - 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi $\left(\overrightarrow{\mathrm{VM}'}, \overrightarrow{\mathrm{UM}'}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, i.e. $(\mathrm{VM}') \perp (\mathrm{UM}')$.

M$'$ décrit donc le cercle de diamètre [U,V] privé de U et V.

EXERCICE 3 SPÉ **5 points**

Partie A : cours....

Partie B

1. Ben 19 étant un nombre premier, 19 et 12 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout...
Comme $19u + 12v = 1$, on a $12v \equiv 1(19)$ donc $13 \times 12v \equiv 13(19)$. Or $6 \times 19u \equiv 0(19)$, donc finalement

$$\mathrm{N} = 13 \times 12v + 6 \times 19u \equiv 13(19)$$

La démonstration est similaire pour l'autre congruence de (S).

2. a) Comme $n \equiv 13(19)$ et $n_0 \equiv 13(19)$, alors, par transitivité $n \equiv n_0(19)$.

Ou, si l'on préfère (E) : $\begin{cases} n \equiv 13(19) & (\mathrm{L}_1) \\ n_0 \equiv 13(19) & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$

$$(\mathrm{E}) \iff \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n - n_0 \equiv 0(19) & (\mathrm{L}_2) \leftarrow (\mathrm{L}_1) - (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

$$(\mathrm{E}) \iff \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv n_0(19) \end{cases}$$

La démonstration est similaire pour l'autre congruence.

b) ▷ Si $n \equiv n_0(12 \times 19)$, alors $n - n_0 \equiv 0(12 \times 19)$, donc il existe un entier k tel que $n - n_0 = 12 \times 19 \times k$. On en déduit que 12 et 19 divisent $n - n_0$ et donc que

$$n \equiv n_0(12 \times 19) \Longrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$$

- ⊳ Si $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$, alors $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0(19) \\ n - n_0 \equiv 0(12) \end{cases}$ 19 et 12 divisent $n - n_0$. Comme 19 et 12 sont premiers entre eux, on utilise alors un corrolaire du théorème de Gauss pour conclure. Rappelons sa démonstration. Il existe deux entiers p et q tels que $n - n_0 = 19p$ et $n - n_0 = 12q$.

  On en déduit que $19p = 12q$. Or 12 divise $12q$, donc $19p$. Mais 12 est premier avec 19, donc, d'après le théorème de Gauss, 12 divise p. Il existe donc un entier p' tel que $p = 12p'$, d'où $n - n_0 = 19 \times (12p')$. La conclusion en découle.

3. a) On peut utiliser l'algorithme d'Euclide étendu. On peut aussi observer les multiples successifs de 19. De toute façon on obtient $-5 \times 19 + 8 \times 12 = 1$. La valeur de N correspondante est 678.

b) En reprenant les questions et notations précédentes, on obtient $n_0 = 678$, et donc que toutes les solutions vérifient $n \equiv 678(12 \times 19)$ et donc que l'ensemble des solutions de (S) est $\{678 + 228k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Or $678 = 228 \times 2 + 222$, donc finalement l'ensemble des solutions est

$$\{222 + 228p,\ p \in \mathbb{Z}\}$$

4. Le nombre n est donc solution de (S). Il s'écrit donc sous la forme $n = 222 + 228p$. Or $0 \leqslant 222 < 228$, donc 222 est bien le reste de la division de n par 228.

EXERCICE 4 **5 points**

1. On fait un arbre et on obtient

a) $\mathbb{P}(\overline{C_2}) = 0,8^2$

b) $\mathbb{P}(C_2) = 1 - 0,8^2$

c) $p_n = \mathbb{P}(C_n) = 1 - 0,8^n$

d) $p_n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01 \iff n\ln(0,8) < ln(0,01) \iff n > 20,63$ Il faut donc attendre 21 tirs.

2.
$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3 + \frac{1}{4}p_4 \\ &= \frac{1}{4}\left(4 - \left(0,8 + 0,8^2 + 0,8^3 + 0,8^4\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left(0,8\frac{1 - 0,8^4}{1 - 0,8}\right) \\ &= 1 - (1 - 0,8^4) \\ &= 0,8^4 = 0,4096 \end{aligned}$$

3. On obtient $d^2 = \frac{3}{800} = 0,00375$, donc $d^2 < D_9$. On ne peut ni répondre à cette mauvaise question, ni rejeter l'hypothèse d'un dé équilibré avec un risque inférieur à 10% de l'avoir fait à tort.