ROMÉO, JULIETTE, DESCARTES ET... LE REQUIN
Recherche du minimum d'une fonction avec XCAS

Compétences mathématiques :
- Généralités sur les fonctions. Sens de variation. Extremum.

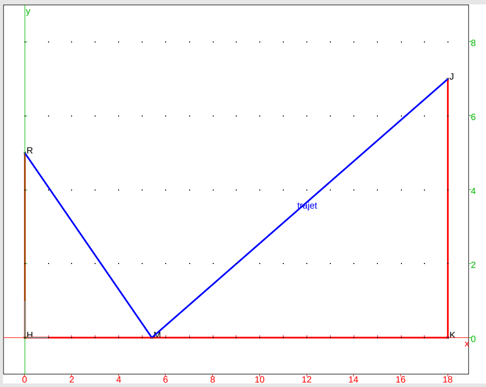
Compétences informatiques :
- Géométrie dynamique. Calcul algébrique. Boucle « TANT QUE ». Distinction fonction/expression.

Prérequis :
- Avoir déjà utilisé **XCAS**

Partie 1: ROMÉO ET JULIETTE

Le problème

Roméo, situé en R, est pressé d'aller rejoindre Juliette, située en J, et de lui offrir une rose. La situation est sschématisée sur la figure suivante :



Nous voudrions déterminer le trajet le plus court sachant que

$$HR = 5\text{m}, \quad KJ = 7\text{m} \quad \text{et} \quad HK = 18\text{m}$$

1. Recherche graphique

a. Placez les points H, R, K et J avec la commande `point`.

b. Tracez la ligne brisée RHKJ en rouge avec une épaisseur de 3.

c. Créez un paramètre x qui symbolisera l'abscisse du point mobile M représentant l'endroit où Roméo cueille la fleur : vous utiliserez comme d'habitude la commande `assume`.

d. Créez le point M.

e. Tracez la ligne brisée représentant le trajet de Roméo en bleu avec une épaisseur de 3.

f. Créez la fonction h qui à x associe la longueur du trajet. Si on se contente d'écrire

```
h:=longueur(R,M)+longueur(M,J)
```

le h crée ne sera pas une *fonction* mais une *expression*, c'est-à-dire un nombre réel : c'est le même problème en mathématiques ! Pour transformer une expression dépendant de x en une fonction de x, on utilise la commande `unapply` :

```
h:=unapply(longueur(R,M)+longueur(M,J),x)
```

g. Tracez le graphe de la fonction h dans la même fenêtre, en vert. On pourra régler la fenêtre en cliquant sur `Cfg`.

h. Créez le point m de cette courbe d'abscisse x.

i. Donnez alors un encadrement à une unité près de la valeur de x corresondant au trajet minimum.

2. Recherche d'une valeur approchée du minimum

a. Exprimez à l'aide d'une phrase contenant « tant que » une méthode permettant de caractériser le minimum de la courbe à 10^{-6} près.

b. Commentez ce script :

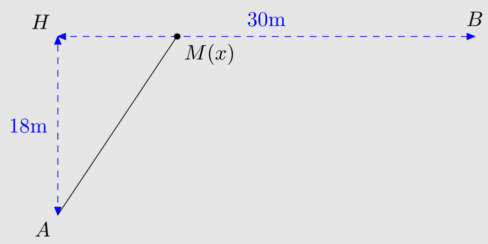
```
X:=7.4+10^(-6):;
Y:=h(7.4):;
tantque evalf(h(X))<Y faire
    Y:=evalf(h(X));
    X:=evalf(X+10^(-6));
ftantque:;
X-10^(-6)
```

c. Écrivez enfin une procédure `mini(xo,p)` qui donnera une approximation du minimum à 10^{-p} près en partant de $x = x_0$.

Partie 2: LES DENTS DE LA MER

Le problème

Albert est un fervent adepte de la plongée sous-marine. Alors qu'il se trouve en A et s'émerveille devant la beauté du paysage aquatique, il aperçoit au loin un requin d'une taille qui le dissuade de poursuivre plus avant son exploration des fonds marins et décide de rejoindre son bateau situé en B. À quel endroit doit-il rejoindre la surface pour que le temps de parcours soit minimal ?



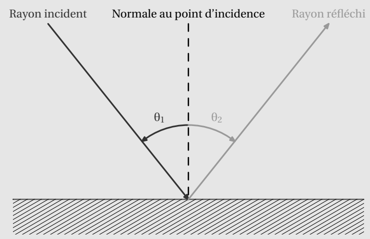
Grâce à l'adrénaline secrétée par la portion médullaire de ses glandes surrénales, Albert se déplace à la vitesse de $7,2\,km.h^{-1}$ sous l'eau et à la vitesse de $9\,km.h^{-1}$ en surface. On supposera que la surface de l'eau est rectiligne, que la dérive due au courant est nulle et que la trajectoire d'Albert est une ligne brisée.

En vous inspirant de l'exemple précédent, donnez une approximation de la solution à 10^{-6} près.

Partie 3: LOI DE DESCARTES

Le problème

Connaissez-vous la loi de Descartes pour la reflexion ?



On a $\theta_1 = -\theta_2$ et donc la normale au point d'incidence représente la bissectrice de l'angle géométrique formé par les rayons incident et réfléchi.

Supposons que nous disposions d'un faisceau lumineux rectiligne émis en un point R et situé à 18 mètres d'un mur.
Il se refléchit sur un miroir plan de longueur 18 mètres situé 5 mètres en-dessous du point R. Le problème est de savoir comment orienter le faisceau afin d'éclairer un point du mur situé 6 mètres au-dessus du miroir.

Répondez à la question en vous inspirant des problèmes précédents. Une fois la figure faite, vous aurez besoin de la commande `resoudre(équation,inconnue)` qui résout l'équation `équation` d'inconnue `inconnue`.