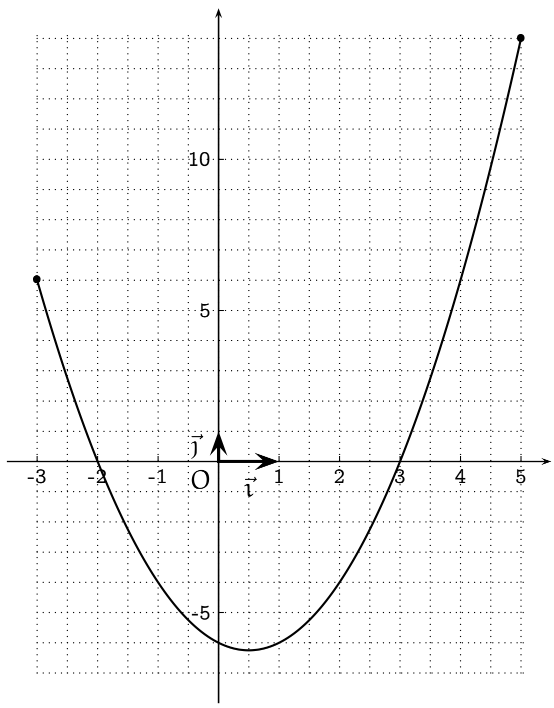
$1^{\text{ère}}$ES1 — Exercices sur les fonctions

Exercice 1



Soit f la fonction définie sur $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - x - 6$.
Ci-contre, on donne $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f.

1. Déterminer graphiquement :
   - $f(0)$: ....
   - l'image de 3 par f : ....
   - les éventuels antécédents de -4 par f : ....
   - les éventuels antécédents de 10 par f : ....
   - les éventuels antécédents de -6 par f : ....
   - l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5 : ....
   - les solutions de l'équation $f(x) = 3$ ....
2. Déterminer algébriquement l'image de $\frac{1}{2}$ par f.
3. Montrer que pour tout x de $[-3;5]$, $f(x) = (x-3)(x+2)$.
4. Retrouver algébriquement les antécédents de 0 par f.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, f est une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

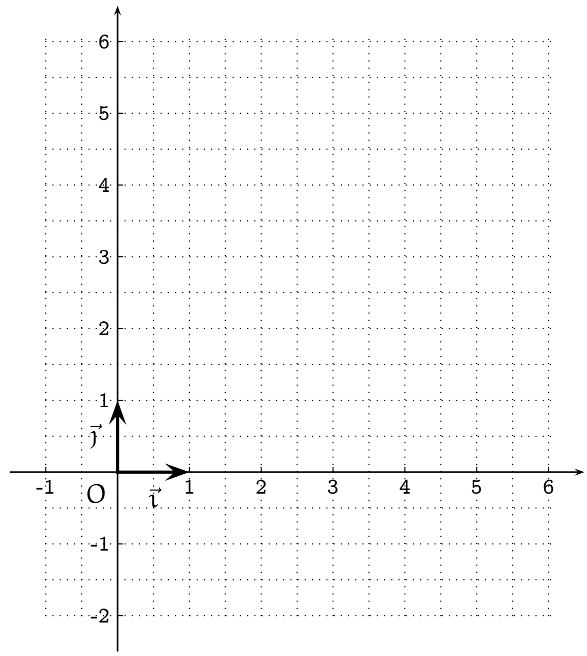
1. Si $f(2) = 3$ alors : **V** **F**
   - 2 est l'image de 3 par f ❐ ❐
   - 2 a pour image 3 par f ❐ ❐
   - 2 est un antécédent de 3 par f ❐ ❐
   - 3 n'admet pas d'antécédent par f ❐ ❐
   - 2 est l'abscisse d'un point de $\mathcal{C}_f$ qui a pour ordonnée 3 ❐ ❐
   - l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution ❐ ❐
2. Si $f(x) = x^2 + 2$ alors : **V** **F**
   - 6 admet deux antécédents par f ❐ ❐
   - l'image de -1 par f est 3 ❐ ❐
   - le point de coordonnées $(2;6)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ ❐ ❐
   - $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses ❐ ❐
   - $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9}$ ❐ ❐

Exercice 3

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant une fonction f définie sur $[-1;6]$ vérifiant les contraintes suivantes :

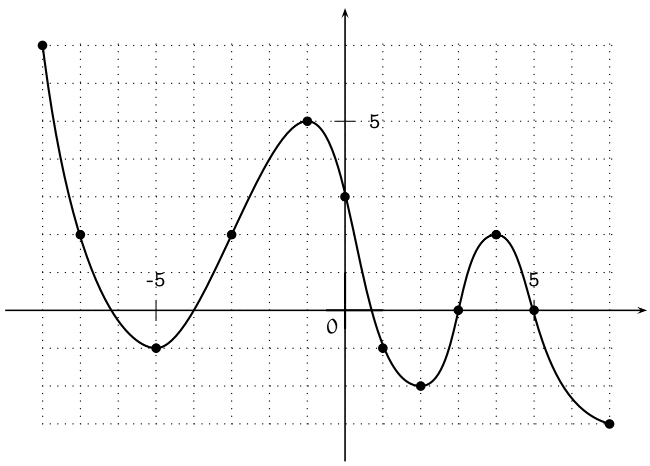
- $f(-1) = 3$;
- l'image de 3 par f est 1 ;
- 2 est un antécédent de -1 par f ;
- 5 est une solution de l'équation $f(x) = 6$;
- l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

1. Traduire chacune des cinq informations données sur f par une information sur $\mathcal{C}$.
2. Donner une allure possible pour la courbe $\mathcal{C}$.



Exercice 4

Soit f la fonction définie par la courbe donnée ci-dessous :



1. Répondre par vrai ou par faux aux proportions suivantes :

	V	F		V	F
			g) $f(-1) = 2$.	❒	❒
a) f est décroissante sur $[-8;7]$.	❒	❒	h) f est croissante sur $[-5;-1]$.	❒	❒
b) Le maximum de f est 7.	❒	❒	i) L'équation $f(x) = 3$ admet 3 solutions.	❒	❒
c) L'image de 5 par f est -1.	❒	❒	j) f est croissante sur l'intervalle $[2,5 ; 3,5]$.	❒	❒
d) L'image de 4 par f est 2.	❒	❒	k) Le minimum de f sur $[-8,0]$ est -3.	❒	❒
e) $f(7) = -3$	❒	❒		V	F
f) L'ensemble de définition de f est $[-8;7]$.	❒	❒	l) $f(-8) > f(6)$.	❒	❒

m) -4 est un antécédent de 0 par f. ❒ ❒

n) $f(-5) = f(2)$. ❒ ❒

o) Le minimum de f est atteint en 7. ❒ ❒

p) $f(0,1) > f(0,2)$. ❒ ❒

q) f est décroissante sur $[-8;-5]$. ❒ ❒

r) L'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions. ❒ ❒

s) f admet un minimum en 2. ❒ ❒

t) Pour tout $x \in [-8;2]$, $f(x) = x^6 + x^2 + 3$. ❒ ❒

u) 2 est l'antécédent de -2 par f. ❒ ❒

v) $f(x) \geqslant -4$ n'admet pas de solutions. ❒ ❒

2. Dresser le tableau de variations de cette fonction.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.

Exercice 5 Pour réviser le Bac de science...

Au temps $t = 0$ on met deux produits chimique A et B dans un bécher. Ils réagissent ensemble de sorte que l'on a constamment $C_A(t) + C_B(t) = 1$, où $C_A(t)$ et $C_B(t)$ sont les concentrations respectives des produits A et B au temps t. Sur la figure ci-contre on a représenté la concentration du produit A en fonction du temps (en heures).

1. Représenter sur le même graphique la concentration $C_B(t)$ du produit B.

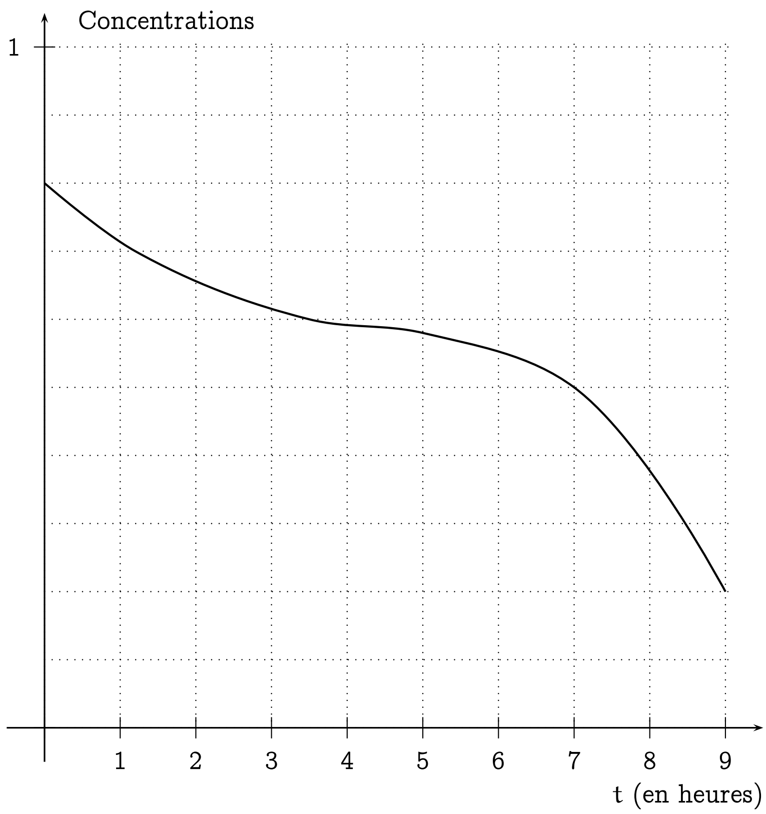
2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $C_A(t) = C_B(t)$

b) $C_A(t) \geqslant C_B(t)$

c) $C_B(t) \geqslant 0,6$

.



En électricité, si on mesure l'intensité qui traverse une résistance ainsi que la tension à ses bor nes, on trouve la relation suivante :

$$\boxed{U = RI}$$

où :

– U est tension (en Volts)
– R est la résistance (en Ohms)
– I est l'intensité (en Ampères)

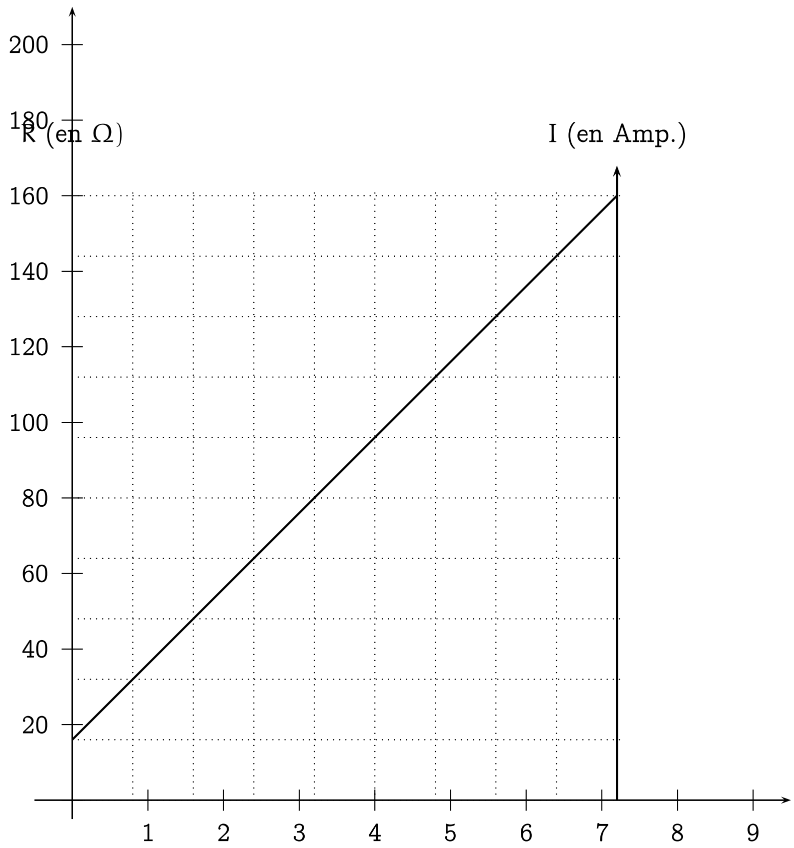
On effectue une expérience au cours de laquelle on fixe la tension $U = 400V$ aux bornes d'un dipôle et on augmente petit à petit la valeur de la résistance de ce dipôle. La mesure $R(t)$ de cette résistance au cours du temps est donnée par le graphique ci-contre.

1. Représenter dans le même graphique l'intensité $I(t)$ en fonction du temps.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

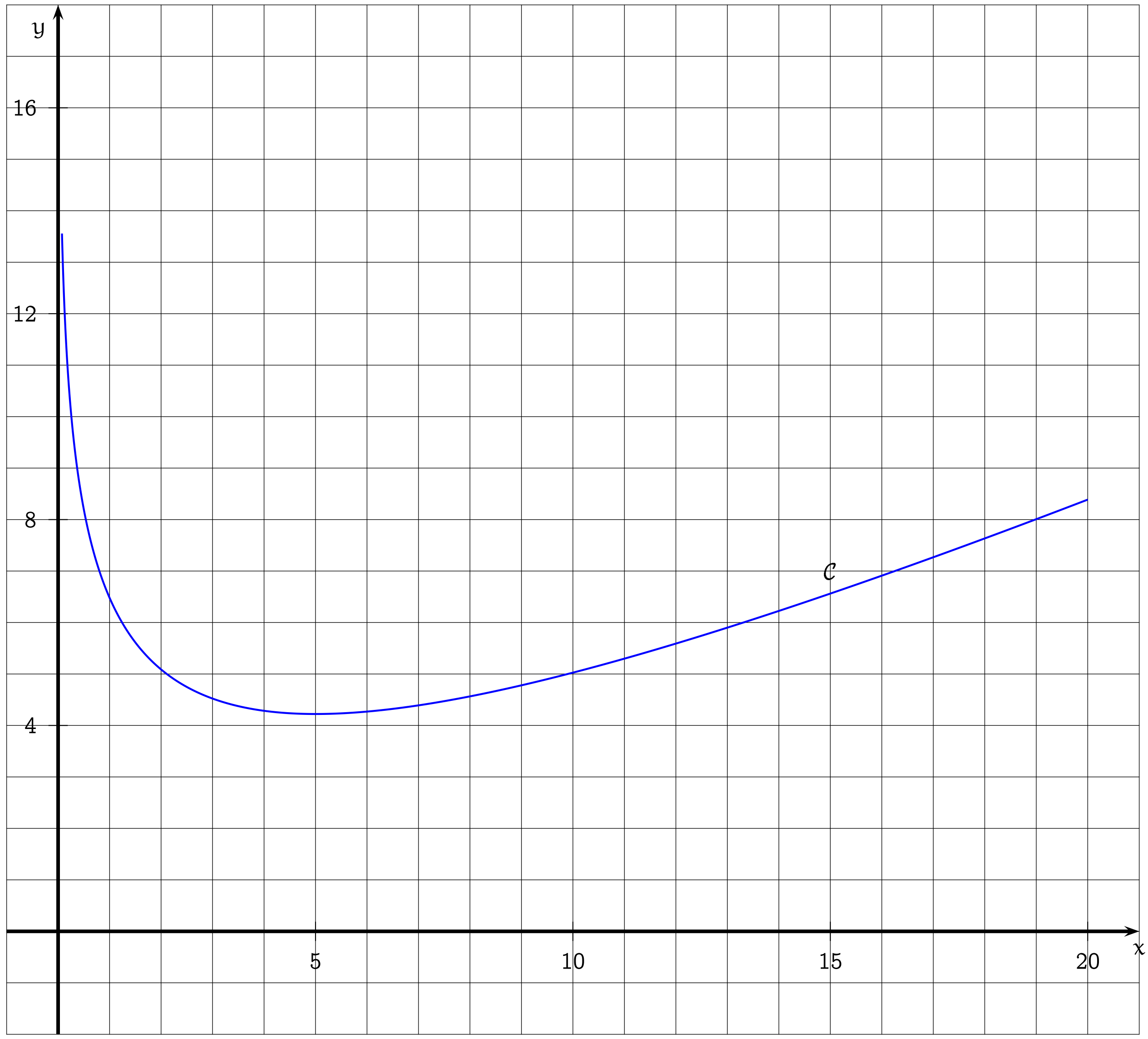
a) $I(t) = 20$

b) $I(t) \leqslant 10$



Exercice 6 D'après Bac ES 2008

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe ci-dessous représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Partie A
Déterminer graphiquement les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 20]$ et dresser son tableau de variations.

On admet que l'équation $f(x) = 6$ possède exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0\ ;\ 20]$ telles que $\alpha \approx 1,242$ et $\beta \approx 13,311$.

Partie B
Une entreprise produit au maximum 20 000 objets par jour.
On note x le nombre de milliers d'objets produits chaque jour travaillé : $x \in]0\ ;\ 20]$.
On admet que le coût moyen de fabrication, exprimé en euros, d'un objet est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie ci-dessus. On répondra aux questions suivantes à l'aide du graphique.

1. a) Pour combien d'objets produits le coût moyen de fabrication est-il minimal ?

b) Déterminer une approximation de ce coût moyen minimal.

2. Le prix de vente d'un objet est de 6 €. Pour quelles productions journalières l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

3. Déterminer une approximation du bénéfice journalier pour une production de 5 000 objets par jour.

4. L'année suivante, le coût moyen augmente de 2 %. Le prix de vente est alors augmenté de 2 %. Le bénéfice journalier reste-t-il identique ? Justifier.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 7 Bac ES 2008

Une entreprise fabrique une quantité x, comprise entre 0 et 20, d'un certain objet.
Le coût total de production f, exprimé en euros, est représenté par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère d'origine O du graphique 1 fourni en annexe (à rendre avec la copie). La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 14 est tracée sur le même graphique.

1. a) Quel est le coût total de production de 10 objets ?

b) Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût total inférieur à 150 € ?

2. Le coût moyen h est donné sur l'intervalle $]0\,;\,20]$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

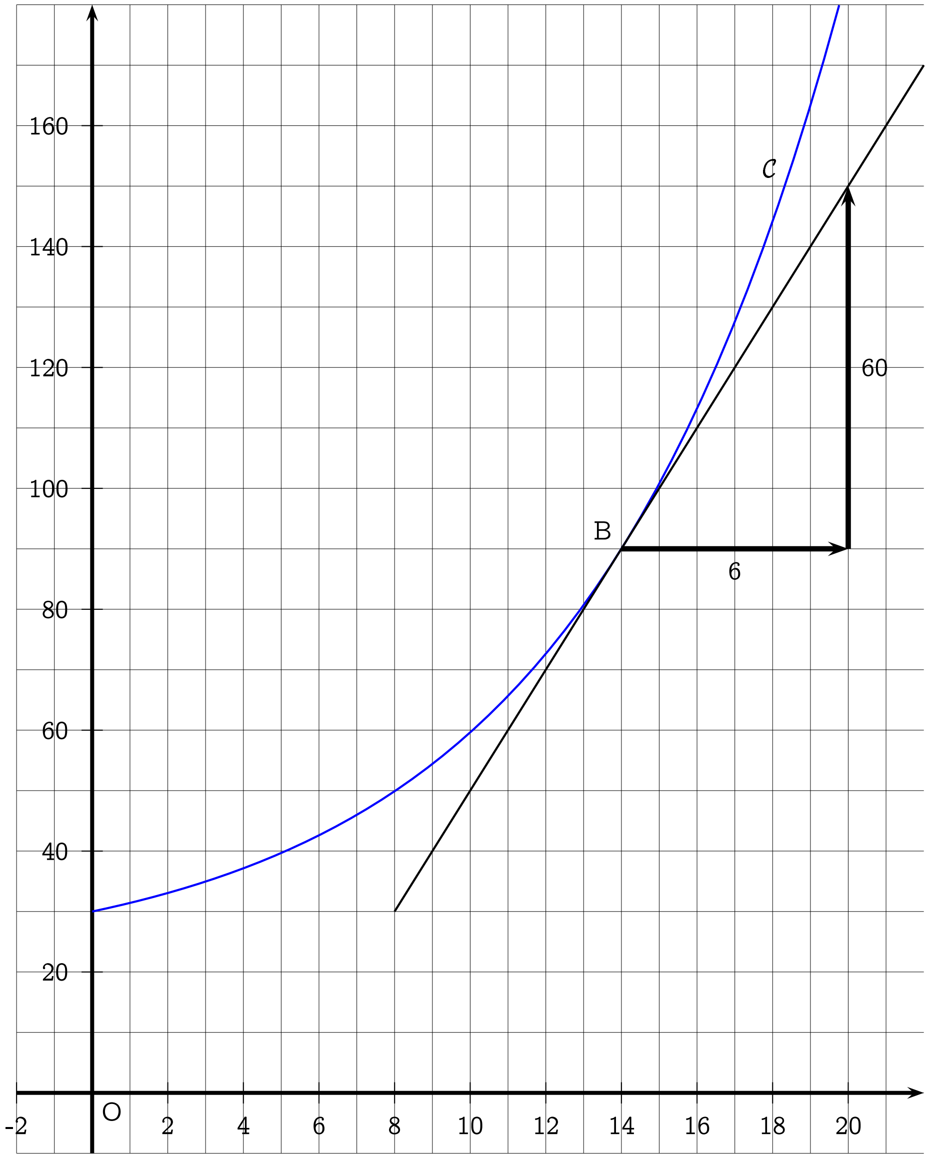
a) Estimer $h(5)$.

b) Sur le graphique 1 de l'annexe, placer le point Q d'abscisse 5 situé sur la courbe $\mathcal{C}$, puis tracer la droite (OQ).

Une expression du coefficient directeur de la droite (OQ) est $\dfrac{f(5)}{5}$. Justifier cette expression.

c) Placer le point A sur la courbe $\mathcal{C}$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathcal{C}$. On appelle a l'abscisse du point A.

d) Conjecturer les variations de h sur l'intervalle $]0\,;\,20]$.
Toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.



Exercice 8

1. Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions usuelles.
   - $f(x) = (x-1)^2$
   - $f(x) = \dfrac{2}{x} + 5$
2. Déterminer l'image de x par « f suivie de g » sachant que $f(x) = x^2 + 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 9

Pour chacun des cas suivants, calculer $f[g(x)]$ et $g[f(x)]$:

1. $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 5x - 4$.
2. $f(x) = x^2 - 6$ et $g(x) = x^2 + 3$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction h puis écrire h comme la composée d'une fonction f suivie d'une fonction g :

1. $h : x \longmapsto \sqrt{1-5x}$.
2. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{5x-7}$.

Exercice 11

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f : x \longmapsto -2 + \frac{1}{x-3}.$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ et $(\mathcal{H})$ celle de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ pour $x \in [-5\ ;\ -1]$.
On se propose de déduire géométriquement $(\mathcal{C}_f)$ de $(\mathcal{H})$.

1. a) Tracer $(\mathcal{H})$.

   b) Par quelle translation pouvez-vous en déduire la représentation $(\mathcal{C}')$ de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-3}$?

   c) Par quelle translation pouvez-vous déduire $(\mathcal{C}_f)$ de $(\mathcal{C}')$?
2. Soit $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.
   Expliquer pourquoi $(\mathcal{C}_f)$ se déduit de $(\mathcal{H})$ par la translation de vecteur $\vec{v}$.
3. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 12

On se propose d'étudier le sens de variation de la fonction f définie pour $x \neq 3$ par : $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$.

1. Compléter : $\dfrac{2x+1}{x-3} = 2 + \cdots$.
2. Après avoir décomposé f à l'aide de trois fonctions, étudier le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\ ;\ 3[$ et sur $]3\ ;\ +\infty[$.

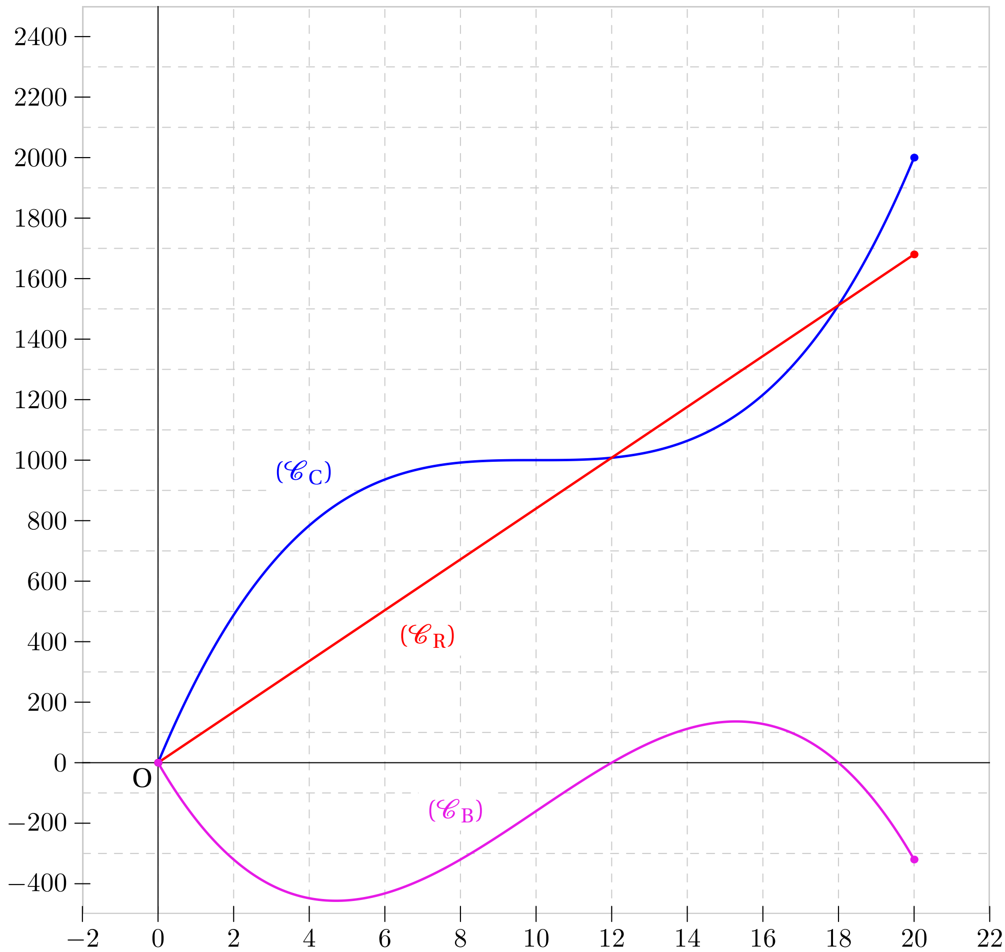
Exercice 13

Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit. q est exprimée en tonnes et varie de 0 à 20. Le coût total de production est , en milliers d'euro :

$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 300q.$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction C.
2. La production est vendue intégralement au prix de 84 000 la tonne. La recette totale, en milliers d'euros est donc : $R(q) = 84q$.
   a) On note B la fonction définie par :
   $$B(q) = R(q) - C(q).$$
   Montrer que $B(q) = -q\big((q-15)^2 - 9)\big)$ puis étudier le signe de la fonction B.
   Interpréter le résultat en terme de bénéfice.
   b) Pout quelle valeur q_0 de q le bénéfice est-il maximal ? Donner le bénéfice maximal.

Illustration



Exercice 14

Soit la fonction f définie par : $f(x) = -\dfrac{4}{x} + 7$.

1. Ecrire f comme la composée de deux fonctions.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 15

On considère la fonction polynôme f définie sur$\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

1. Déterminer les réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-\alpha)^2 - \beta$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimal.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty\ ;\ 1[$, puis sur $]1\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. En utilisant la question **1)**, résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Compléter un tableau de valeurs, puis tracer l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (ce type de fonctions est appelé **fonction trinôme du second degré**).

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(x) = (x-2)^2 - 1$ (ceci est ce que l'on appellera dans un prochain chapitre la **forme canonique** du trinôme...)
2. En déduire par quelle transformation géométrique on passe de la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction $x \mapsto x^2$ à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
4. Tracer précisément la courbe $\mathcal{C}$.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Retrouver le résultat par le calcul, en remarquant que $(x-2)^2 - 1 = (x-2)^2 - 1^2 = \ldots$ et en se ramenant à une équation de type "produit nul".
6. Déterminer le signe de la fonction f selon les valeurs de x (on pourra présenter les résultats dans un tableau de signes).

Exercice 17

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $h(x) = \frac{-x^2+3}{x+1}$

1. Démontrer que, pour tout réel x différent de -1, on a $h(x) = -x + 1 + \frac{2}{x+1}$.
2. Tracer successivement les hyperboles $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ représentant respectivement les fonctions $x \mapsto \frac{2}{x}$ et $x \mapsto \frac{2}{x+1}$.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ représentant la fonction affine $x \mapsto -x + 3$ sur ce même graphique.
4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est décroissante sur $]-\infty;-1[$. Quel est le sens de variation de la fonction affine $x \mapsto -x + 1$ sur $]-\infty;-1[$?
5. En déduire le sens de variations de la fonction h sur $]-\infty;-1[$. Peut-on déterminer le sens de variations de h sur $]-1;+\infty[$?

6. Tracer très précisément -en bleu - la courbe $\mathcal{C}_h$ représentant la fonction k sur le même graphique que les autres.