Présentation de XCAS au lycée

Journée IREM 11 juin 2008

Guillaume CONNAN

IREM Pays de la Loire

11 juin 2008

Sommaire

Tous les fichiers nécessaires à la lecture de ce document se trouvent ▸ ICI

Il est aussi nécessaire d'avoir une version de XCAS postérieure à celle du 11 juin 2008.

Pour ceux qui veulent compiler le source .tex, il faut une version de pgiac postérieure à celle du 10 juin 2008.

Votre système doit également être configuré pour ouvrir les fichiers d'extension .xws avec XCAS et les fichiers .tex et .w avec votre éditeur LaTeX préféré.

XCAS est installable facilement sur tout OS via internet :

Site XCAS

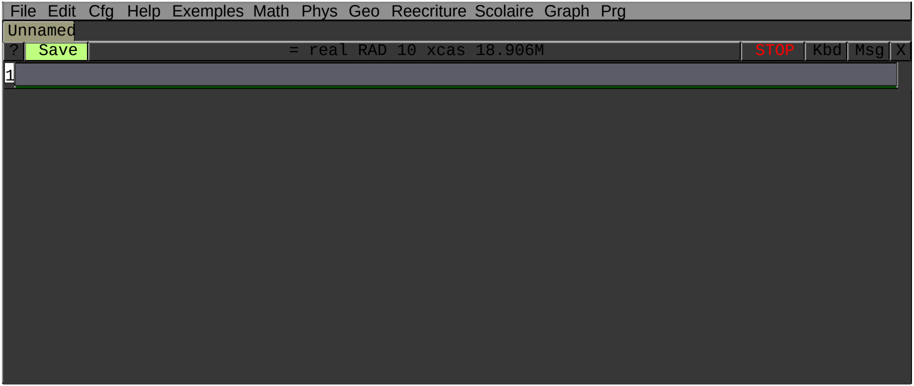
Choisissez le niveau `Université`

XCAS est installable facilement sur tout OS via internet :

Site XCAS

Choisissez le niveau `Université`

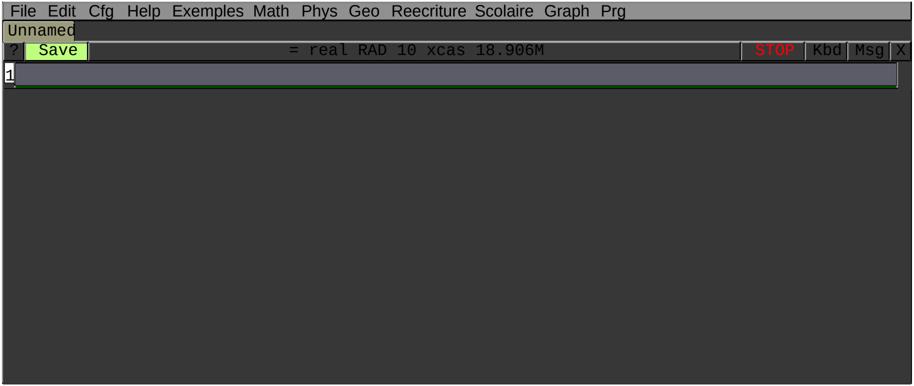
L'écran suivant apparaît :



Mais voyons plutôt ce que cela donne en vrai :

Lancer XCAS

L'écran suivant apparaît :



Mais voyons plutôt ce que cela donne en vrai :

Lancer XCAS

La première idée est d'utiliser XCAS comme un super calculateur.
Prenons quelques questions classiques du Bac S

Énoncé

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2e^{x} - x - 2.$$

```
g(x):=2*exp(x)-x-2
```

(x)->2*exp(x)-x-2

Énoncé

Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

```
limite(g(x),x=+infinity);
```

$$+\infty$$

```
limite(g(x),x=-infinity);
```

$$+\infty$$

Énoncé

Étudier le sens de variation de g

```
deriver(g(x))
```

$$2e^x - 1$$

```
resoudre(deriver(g(x))>0)
```

$$[x > (\ln\left(\frac{1}{2}\right))]$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$		$\ln\left(\frac{2}{e^1}\right)$		$+\infty$

Énoncé

On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.

```
g(0)
```

$$0$$

```
fsolve(g(x)=0,x=-2)
```

$$-1.593624$$

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x.$$

```
f(x):=exp(2*x)-(x+1)*exp(x)
```

(x)->exp(2*x)-(x+1)*exp(x)

Énoncé

Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

```
limite(f(x),x=+infinity); limite(f(x),x=-infinity);
```

$$+\infty, 0$$

Énoncé

Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Étudier le sens de variation de f.

```
deriver(f(x))
```

$$e^{2x}2+-(e^{x})-((x+1)e^{x})$$

```
simplifier(deriver(f(x))/exp(x))
```

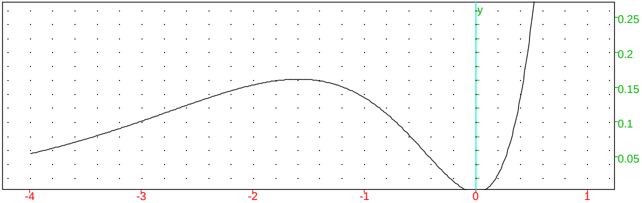
$$-x+2e^{x}-2$$

```
f(fsolve(g(x)=0,x=-2))
```

$$0.161903$$

Puis le graphe de f :

```
graphe(f(x),x=-4..1)
```



Sommaire

Il faut d'abord préciser à XCAS que l'on va travailler avec des complexes :

```
complex_variables:=1:; complex_mode:=1:;
```

Done, Done

Sommaire

Énoncé

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe B.

```
a:=i;b:=2;
```

$$i, 2$$

Énoncé

Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$;

```
h:=homothetie(a,sqrt(2))
```

(x)->homothetie(i,sqrt(2),x)

```
b1:=evalc(affixe(h(b)))
```

$$2\sqrt{2}+i\left(-\left(\sqrt{2}\right)+1\right)$$

Énoncé

Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et de rapport $\frac{\pi}{4}$

```
r:=rotation(a,pi/4)
```

(x)->rotation(i,pi/4,x)

```
bp:=evalc(affixe(r(b1)))
```

$$3 + 2 * i$$

Énoncé

Soit f définie par $f(z) = (1+i)z + 1$ et F l'application du plan dans lui-même associée.

```
f(z):=(1+i)*z+1
```

(z)->(1+i)*z+1

Énoncé

Montrer que B a pour image B' par F.

```
evalc(f(b))
```

$$3 + 2 * i$$

Énoncé

Déterminer les invariants de F.

```
csolve(f(z)=z,z)
```

$$[i]$$

On peut remplacer `csolve` par `resoudre_dans_C`

Énoncé

Donner, pour tout complexe z différent de i, la forme algébrique de $\frac{f(z)-z}{i-z}$.

```
evalc((f(z)-z)/(i-z))
```

$$-i$$

Énoncé

On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

```
O:=point(0):;A:=point(4-2*i):;
```

Done, Done

```
t:=triangle_equilateral(O,A,B):;
```

```
evalc(affixe(B))
```

$$\sqrt{3}+2+i(2\sqrt{3}-1)$$

Énoncé

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
$\overline{z} - 3\mathrm{i}z - 3 + 6\mathrm{i} = 0$
où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

```
simplifier(csolve(conj(z)-3i*z-3+6i=0,z))
```

$$\left[\frac{9-6*i}{4-4*i}\right]$$

Sommaire

Énoncé

On appelle r la rotation de centre $\Omega(2)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On pose $s = h \circ r$. Quelle est l''écriture complexe de s ?

On n'oublie pas de se mettre en mode complexe :

```
complex_variables:=1:; complex_mode:=1:;
```

Done, Done

On commence par créer une procédure qui donne l'écriture complexe d'une similitude définie géométriquement :

```
SimiComp(s):={ evalc(coeff(affixe(s(z)),z,1))*z+evalc(
    coeff(affixe(s(z)),z,0)) }:;
```

```
o:=2:;r:=rotation(o,pi/4):;
```

$$\text{Done}, \text{Done}$$

```
h:=homothetie(o,sqrt(2)/2):;s:=h@r:;
```

$$\text{Done}, \text{Done}$$

```
S:=z->SimiComp(s):; simplifier(S(z))
```

$$\text{Done}, \frac{1+i}{2} \times z + 1 - i$$

Énoncé

Quels sont les éléments caractéristiques de s ?

- Son rapport :

```
abs(1/2+i/2)
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Son angle :

```
arg(1/2+i/2)
```

$$-\left(\frac{(-\pi)}{4}\right)$$

Les affixes des éventuels invariants :

- `csolve(S(z)=z,z)`

$$[2]$$

On peut améliorer la chose en créant une procédure qui détermine les éléments caractéristiques de la similitude :

```
  CaracSimiD(s):={
  local a,solu;
  a:=coeff(s,z,1);
  solu:=csolve(s=z,z);
  return ("Le rapport est "+simplifier(abs(a))+ "
L'angle a pour mesure principale "+simplifier(arg(a))+
  if(size(solu)==0){"
Il n'y a pas d'invariant"
   }else{"
Le(s) point(s) invariant(s) a(ont) pour affixe(s) : "+solu
    [0]
   }
  )
  }:;
```

Ce qui donne :

```
CaracSimiD((1/2+i/2)*z+1-i)
```

Le rapport est sqrt(2)*2/4 L'angle a pour mesure principale 1/4*pi Le(s) poir

Dans le cas d'une similitude indirecte :

```
csolve(-i*conj(z)+2+2*i=z,z)
```

$$[`x` + i(-`x` + 2)]$$

que l'on peut interpréter facilement.

En reprenant notre précédente procédure, cela fonctionne encore en rajoutant des apostrophes pour rendre formel `conj(z)` :

```
CaracSimiI(s):={
local a,solu;
a:=coeff(s,'conj(z)',1);
solu:=csolve(s=z,z);
return ("Le rapport est "+simplifier(abs(a))+"
L'angle a pour mesure principale "+simplifier(arg(a))+
if(size(solu)==0){
   "
Il n'y a pas d'invariant"
  }else{"
Le(s) point(s) invariant(s) a(ont) pour affixe(s) : "+solu
    [0]
   }
  )
  }:;
```

On entre

```
CaracSimiI('-i*conj(z)+2+2*i')
```

Le rapport est 1 L'angle a pour mesure principale -1/2*pi Le(s) point(s) invar

Sommaire

Énoncé

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment. Vérifier qu'elle est incluse dans la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Session XCAS

Sommaire

Énoncé

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. On définit une application, que l'on appellera *machination* et qu'on notera μ, de la manière suivante : à tout point M différent de O, on assocoe le point M' tel que M' soit le symétrique de M par rapport à I_M, I_M étant le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[OM)$.
On dit que **M a pour image M' par la application μ** et on note

$$M \stackrel{\mu}{\longmapsto} M'$$

On s'occupe d'abord de l'image d'un cercle de même centre que $\mathcal{C}$.

Session XCAS

Occupons-nous à présent de l'image d'une droite ne passant pas par O.

Session XCAS

Occupons-nous à présent de l'image d'un cercle de centre et de rayons quelconques.

Session XCAS

Sommaire

Énoncé

On donne $A(1\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ -3)$, $C(2\ ;\ 3)$ et $G(2\ ;\ 0)$.
Déterminer les nombres coefficients entiers α, β et γ tels que G soit le barycentre des points (A, α), (B, β) et (C, γ).

Session XCAS

Sommaire

Le texte du TD :

Texte du TD

```
complex_variables:=0:; complex_mode:=0:;
```

Done, Done

Question

On considère les points $A\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $B(1,-2)$ et $C\left(3, \frac{1}{2}\right)$
On détermine les coordonnées du point D tel que ACBD soit un parallélogramme

Pour cela, on pose (x, y) les coordonnées cherchées de D et on sait que ACBD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$ par exemple.

```
A:=point(-3/2,2):;B:=point(1,-2):;C:=point(3,1/2):;
```

Done, Done, Done

```
CV(M,N):={coordonnees(vecteur(M,N))}:;
```

```
resoudre(CV(C,A)=CV(B,point(x,y)),[x,y])
```

$$\begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

```
D:=point(resoudre(CV(C,A)=CV(B,point(x,y)),[x,y])[0]):;
```

Question

Déterminez les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

```
M:=point(resoudre(CV(A,point(x,y))=(2/3)*CV(A,C),[x,y])
    [0]):;

coordonnees(M)
```

$$[\frac{3}{2}, 1]$$

Question

Déterminez les coordonnées du point E, symétrique du point D par rapport au point M

```
E:=point(resoudre(CV(D,M)=CV(M,point(x,y)),[x,y])[0]):;
```

```
coordonnees(E)
```

$$[\frac{13}{2}, \frac{5}{2}]$$

REMARQUE

On aurait pu utiliser une commande **XCAS** toute faite : `E :=symetrie(M,D)`...mais c'est de la triche car on ne colle plus à notre cours et on laisse tout faire au logiciel.

Question

Déterminez les coordonnées du point N, milieu de [B,E]

```
N:=point(resoudre(CV(B,E)=2*CV(B,point(x,y)),[x,y])[0]):;
```

```
coordonnees(N)
```

$$\left[\frac{15}{4},\frac{1}{4}\right]$$

REMARQUE

Là encore, on aurait pu utiliser une commande **XCAS** toute faite : `N :=milieu(B,E)`

Démontrez que le point N appartient à la droite (AC)

Question

L'idée est d'utiliser la condition de colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vue en cours. Pour cela, nous allons créer une fonction qu'on appellera par exemple `nemo` :

```
nemo(u,v):=abscisse(u)*ordonnee(v)-abscisse(v)*ordonnee(u)
    :;
```

Comme vous connaissez votre cours, vous savez que `nemo(u,v)` sera nul si, et seulement si, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Ici, cela donne :

```
nemo(vecteur(A,C),vecteur(A,N))
```

$$0$$

Déterminez l'ordonnée du point P d'abscisse 4 qui appartient à la droite (DM)

Question

Vous devez savoir que le point P appartient à la droite (DM) si, et seulement si, les points M,D et P sont alignés, c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DP}$ sont colinéaires. Faisons donc encore appel à `nemo(u,v)` pour répondre à la question. Posons $(4, y)$ les coordonnées de P. Alors y est solution de l'équation $\mathtt{nemo}(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DP}) = 0$, ce qui s'écrit :

```
yp:=resoudre(nemo(vecteur(D,M),vecteur(D,point(4,y)))=0,y)
    [0]
```

$$\frac{7}{4}$$

```
coordonnees(point(4,yp))
```

$$[4, \frac{7}{4}]$$

Avec un peu d'imagination...

Nous avons vu en cours que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ étaient alignés.
Imaginez alors un moyen pour obtenir y en fonction de x à l'aide de `nemo`, `resoudre` et `vecteur`.

```
resoudre(nemo(vecteur(A,point(x,y)),vecteur(A,B))=0,y)[0]
```

$$\frac{(8x+2)}{-5}$$

Sommaire

Session XCAS

Voir aussi Lignes de niveaux

Sommaire

Session XCAS

Exemple 1

Session XCAS

Exemple 2

Session XCAS

Session XCAS

Session XCAS

▸ Session XCAS

◂ Retour sections

Le texte du TD :

Texte du TD

Le texte du TD :

Texte du TD

La session XCAS :

Session XCAS

Le texte du TD :

Texte du TD

La session XCAS :

Session XCAS

TD en ligne

Utiliser LATEX, c'est gagner en temps et en qualité. Voici une extension qui permet d'obtenir très rapidement des tableaux de signe ou de variation. C'est XCAS qui effectue les calculs !

Ouvrons Emacs

Doc Prog Lin

▸ Corrigé Bac

Corrigé Bac

En direct !

Ouvrons Emacs