Quelques outils mathématiques pour étudier le mouvement d'un bras de robot

Algèbre - Géométrie INFO2

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

14 novembre 2011

Sommaire

Sommaire

Voici une figure extraite d'un article de la revue Clinical Biomechanics

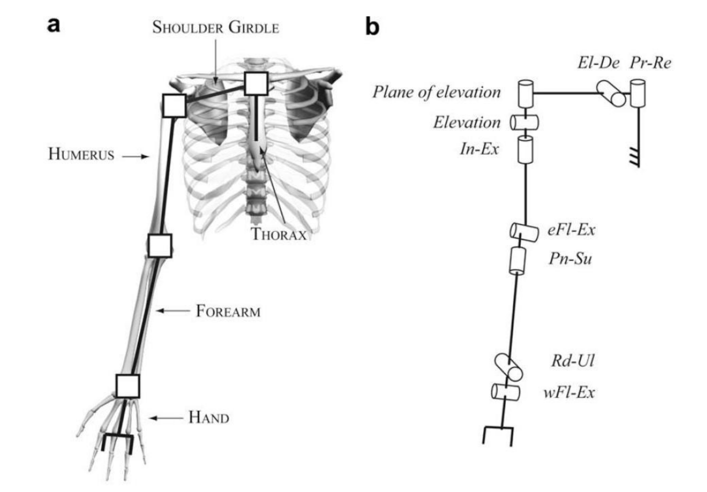


Figure: Équivalent cinématique du système thorax/humérus/avant-bras

Sommaire

Sommaire

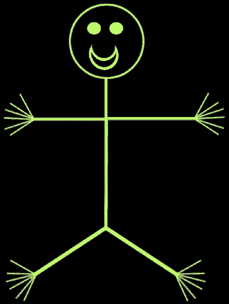


Figure: L'homme : première version

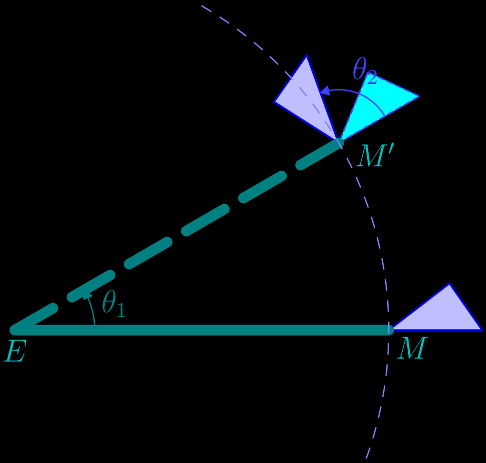


Figure: Mouvement d'un bras à 2 degrés de liberté

Sommaire

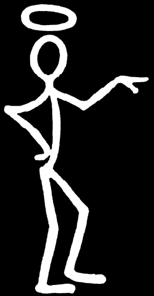


Figure: L'homme : deuxième version

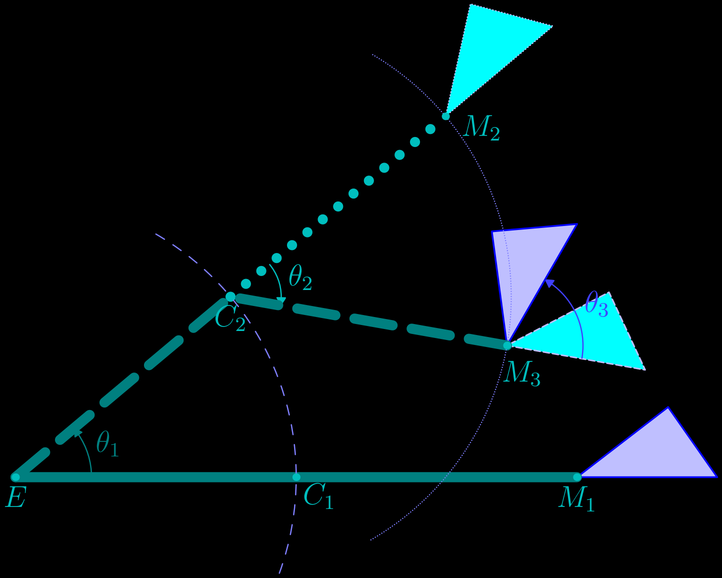


Figure: Mouvement d'un bras à 3 degrés de liberté

Sommaire

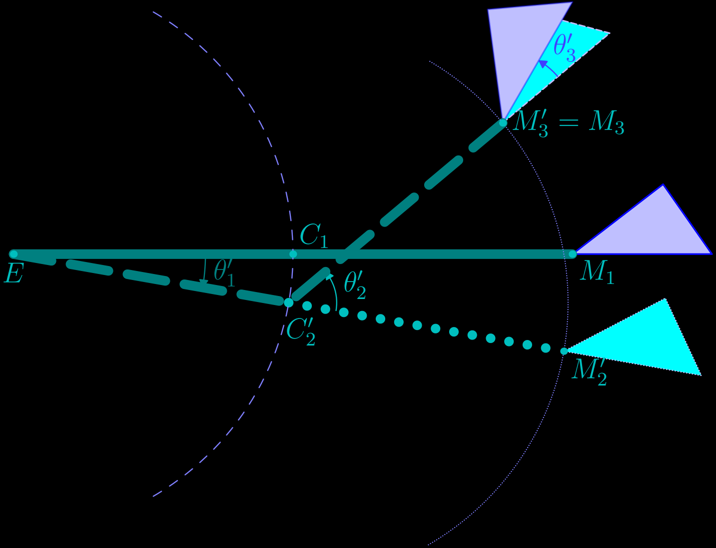


Figure: Mouvement d'un bras à 3 degrés de liberté : version alternative vers la même position finale

Attention

La connaissance de l'état final et de l'état initial ne suffit pas à connaître le mouvement qui a conduit de l'un à l'autre de manière précise.

Sommaire

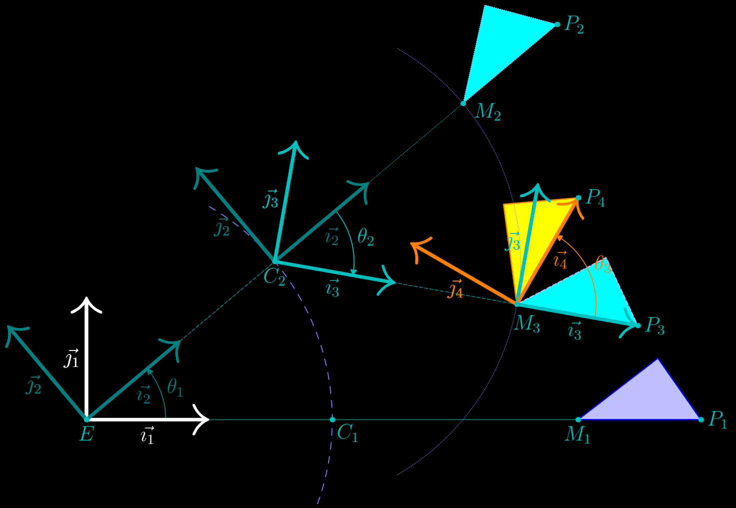


Figure: Mouvement d'un bras à 3 degrés de liberté : repères permettant de décrire les mouvements relatifs

Pouvez-vous devinez la trajectoire de P dans le repère $\left(E; \overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}\right)$?

Sommaire

Fermez les yeux et regardez un de vos bras. Pour schématiser, on considèrera comme origine la fixation supérieure de l'humerus à l'épaule. Faites-le bouger les yeux toujours fermés et faites la liste des mouvements, degrés de libertés, repères mobiles.

Tendez votre bras au maximum et imaginez la demi-sphère approximative que vous pouvez atteindre en faisant bouger votre bras au niveau de l'épaule. Pouvez-vous atteindre n'importe quel point à l'intérieur de cette demi-sphère en faisant fonctionner toutes les articulations ?

Imaginez maintenant que le coude soit rendu rigide (une rotation en moins), disons dans une position où l'humerus et l'avant-bras sont à angle droit : pouvez-vous vous gratter sous les aisselles ? Pouvez-vous saisir le livre posé verticalement sur votre table ?

Toujours avec ce handicap, imaginez que vous disposiez d'une pince au bout d'une tige télescopique dont vous pouvez animer le moteur : cela arrange-t-il vos affaires ? Comment décrire ce nouveau mouvement élémentaire ?

Sommaire

Sommaire

On peut montrer (et nous l'admettrons) que tout déplacement dans l'espace est

- soit une translation ;
- soit une rotation ;
- soit une rotation, soit une composée de translations et de rotations.

On peut montrer (et nous l'admettrons) que tout déplacement dans l'espace est

- soit une translation ;
- soit une rotation ;
- soit une rotation, soit une composée de translations et de rotations.

On peut montrer (et nous l'admettrons) que tout déplacement dans l'espace est

- soit une translation ;
- soit une rotation ;
- soit une rotation, soit une composée de translations et de rotations.

Définition (Déplacement)

Un déplacement est une transformation de l'Espace qui conserve les distances et les angles orientés. Intuitivement, on prend un objet et on le déplace sans le déformer.

Sommaire

Définition (translation)

Une translation est un déplacement qui consiste à faire glisser un solide sans changement de direction, de sens, de longueur.

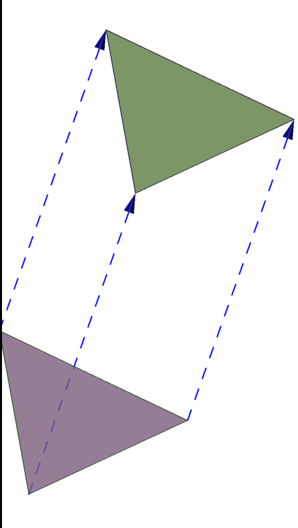


Figure: Translation dans l'espace

Translation non rectiligne

Dans l'esprit de trop d'étudiants, translation est synonyme de translation rectiligne mais attention ! Le solide suivant est en translation :

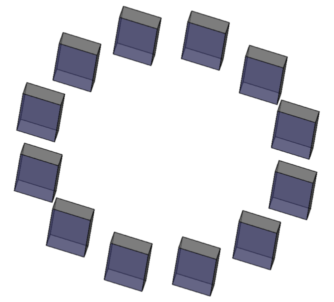


Figure: Translation dans l'espace

Définition (rotation)

Une rotation dans l'Espace est définie par la donnée d'un axe et d'un angle. Le solide « tourne » alors d'un certain angle autour d'un certain axe.

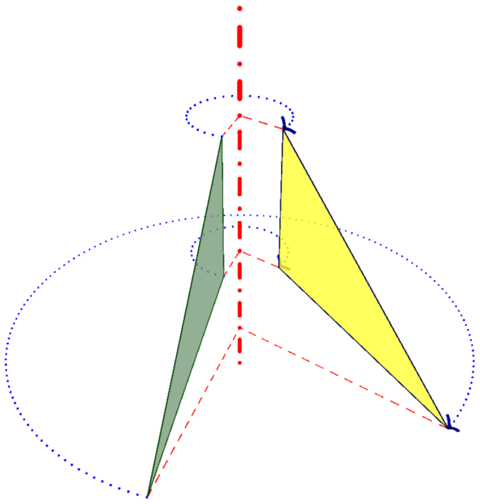


Figure: Rotation dans l'espace

Sommaire

On part d'un domino :

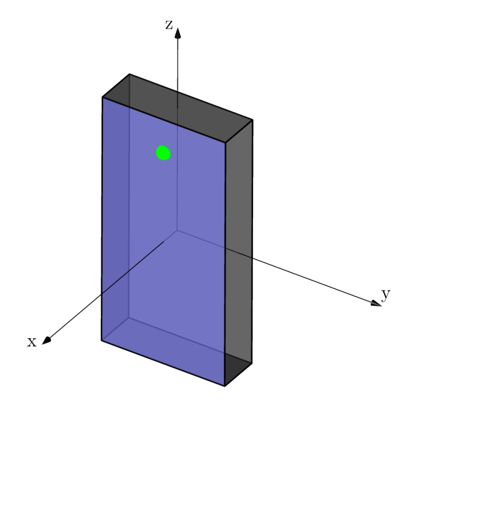


Figure: Domino

On effectue une rotation d'axe (Oz) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivie d'une rotation d'axe (Oy) et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

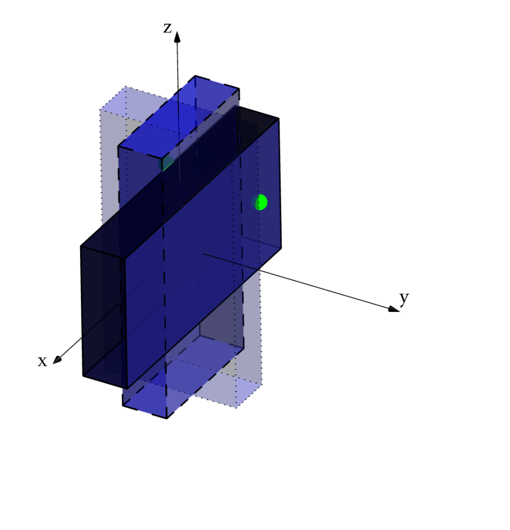


Figure: Rotation d'axe (Oz) suivie d'une rotation d'axe (Oy)

On inverse l'ordre des rotations

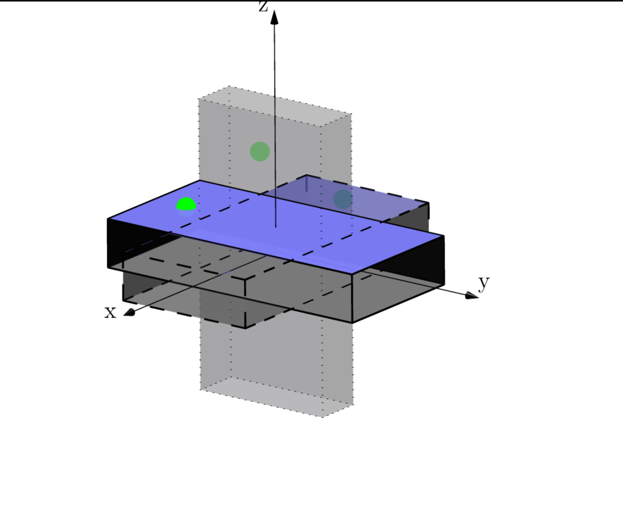


Figure: Rotation d'axe (Oy) suivie d'une rotation d'axe (Oz)

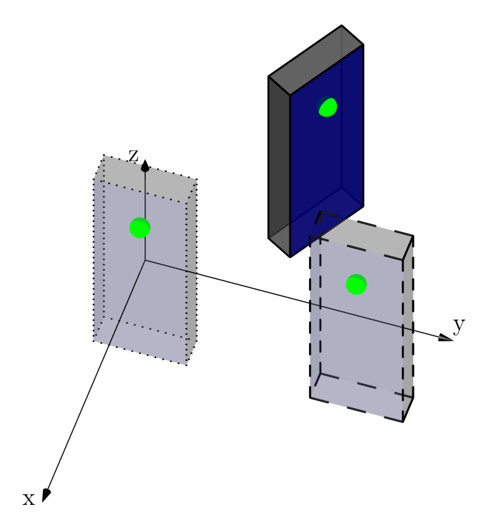


Figure: Translation suivie d'une rotation

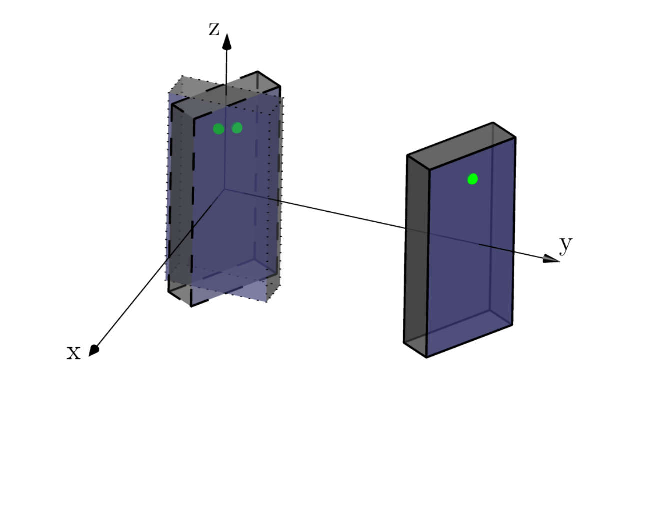


Figure: Même rotation suivie de la même translation

Définition

Un vissage est la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur de même direction que celle de l'axe de la rotation.

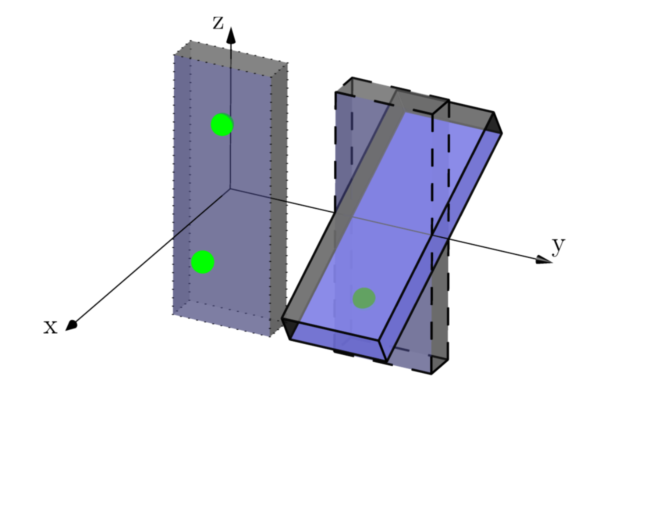


Figure: Vissage : translation suivie de rotation

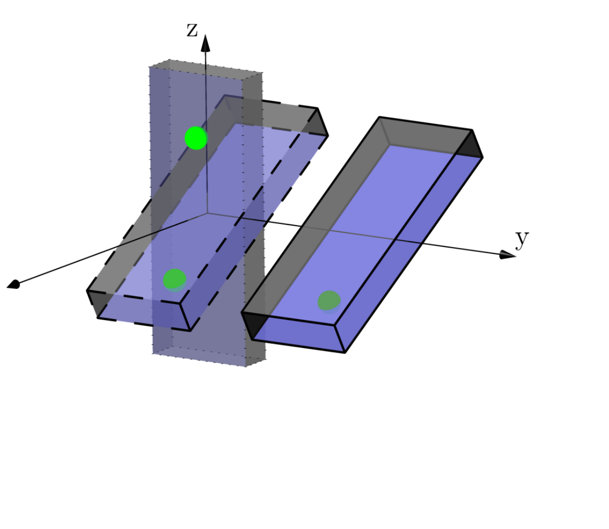


Figure: Vissage : rotation suivie de translation

Sommaire

Exercice

En utilisant des objets géométriques simples (sphères, cylindres, pavés, etc.) donnez au moins un exemple de solide ayant k degrés de liberté avec k un entier compris entre 0 et 6.
Par exemple, une boule posée sur un plan a 5 degrés de liberté.

Jokers

4 degrés de liberté plan-cylindre ;

3 degrés de liberté plan-plan, rotule (sphère pivotant à l'intérieur d'un bloc) ;

2 degrés de liberté verrou : cylindre glissant à l'intérieur d'un bloc ;

1 degré de liberté glissière (une translation) ou rotoïde (une rotation).

Jokers

4 degrés de liberté plan-cylindre ;

3 degrés de liberté plan-plan, rotule (sphère pivotant à l'intérieur d'un bloc) ;

2 degrés de liberté verrou : cylindre glissant à l'intérieur d'un bloc ;

1 degré de liberté glissière (une translation) ou rotoïde (une rotation).

Jokers

4 degrés de liberté plan-cylindre ;

3 degrés de liberté plan-plan, rotule (sphère pivotant à l'intérieur d'un bloc) ;

2 degrés de liberté verrou : cylindre glissant à l'intérieur d'un bloc ;

1 degré de liberté glissière (une translation) ou rotoïde (une rotation).

Jokers

4 degrés de liberté plan-cylindre ;

3 degrés de liberté plan-plan, rotule (sphère pivotant à l'intérieur d'un bloc) ;

2 degrés de liberté verrou : cylindre glissant à l'intérieur d'un bloc ;

1 degré de liberté glissière (une translation) ou rotoïde (une rotation).

Jokers

4 degrés de liberté plan-cylindre ;

3 degrés de liberté plan-plan, rotule (sphère pivotant à l'intérieur d'un bloc) ;

2 degrés de liberté verrou : cylindre glissant à l'intérieur d'un bloc ;

1 degré de liberté glissière (une translation) ou rotoïde (une rotation).

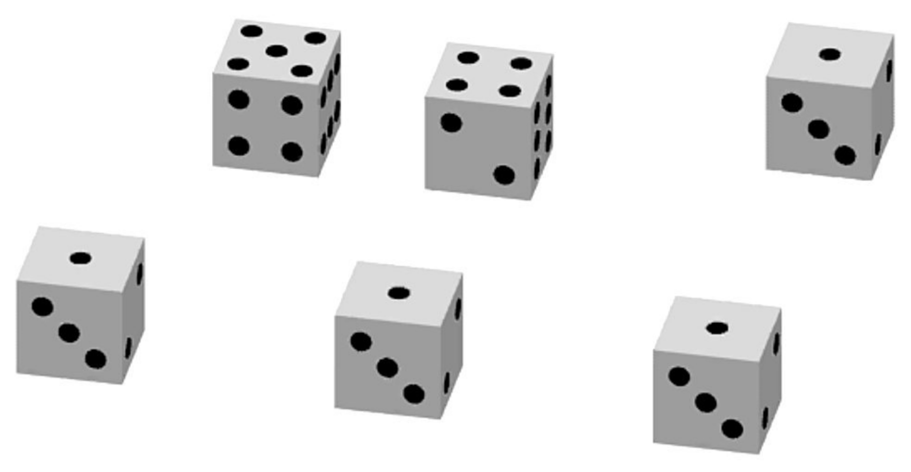
Exercice

Vous êtes immobile, debout, les bras le long du corps. Vous faites glisser votre main vers le haut le long du corps supposé vertical. Comment décrire le mouvement de votre coude par rapport à un de vos orteils supposé fixe ?

Exercice

Les six dés étaient dans la même position au départ (celle qui correspond à la rangée du bas).
On considère les trois rotations d'angle 90° liées au repère mobile d'origine le centre du dé et d'axes perpendiculaire aux faces « un », « deux » et « trois ».
De combien de façons peut-on combiner ces rotations ?
Le premier dé en haut à gauche a subi trois rotations, le second à sa droite en a subi deux et les autres aucune. Déterminer la « face finale » de chaque combinaison de trois rotation.

Exercice (suite)



Sommaire

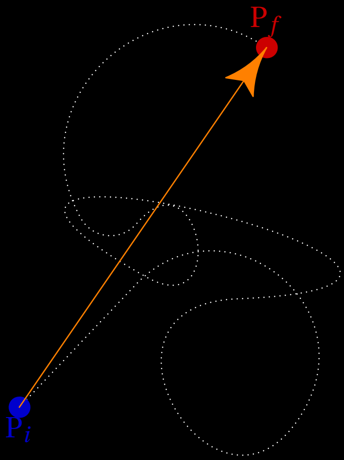


Figure: Déplacement et vecteur

Sommaire

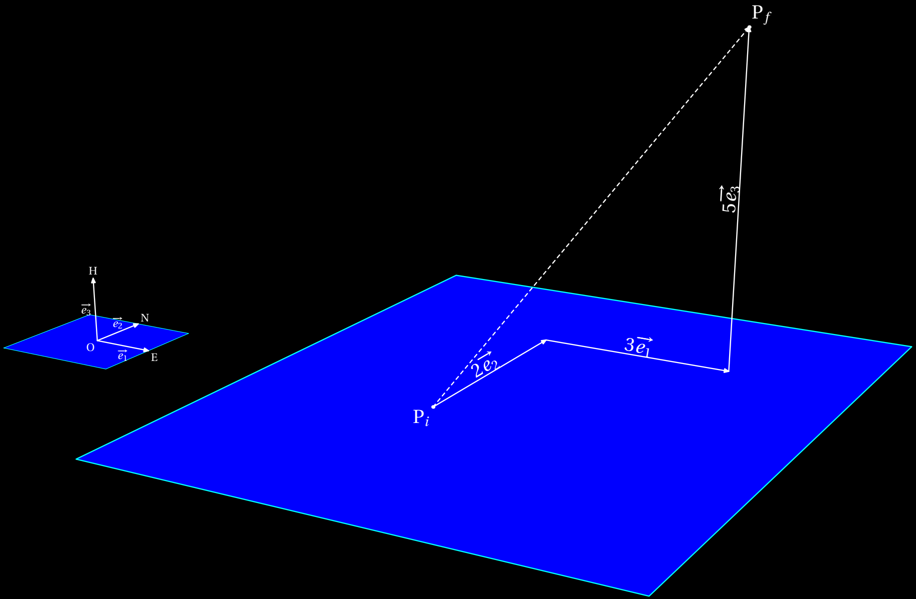


Figure: Décomposition d'un vecteur dans une base

Théorème (base de l'Espace)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ *et* $\overrightarrow{e_2}$ *deux vecteurs non colinéaires : ils définissent un plan vectoriel. Soit* $\overrightarrow{e_3}$ *un troisième vecteur n'appartenant pas à ce plan vectoriel, alors la famille de vecteurs* $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ *forme une BASE de l'Espace et pour n'importe quel vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de l'Espace, il existe trois nombres* (x, y, z) *tels que*

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

Les nombres x, y *et* z *sont appelés les COORDONNÉES de* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.

Repère orthonormé direct

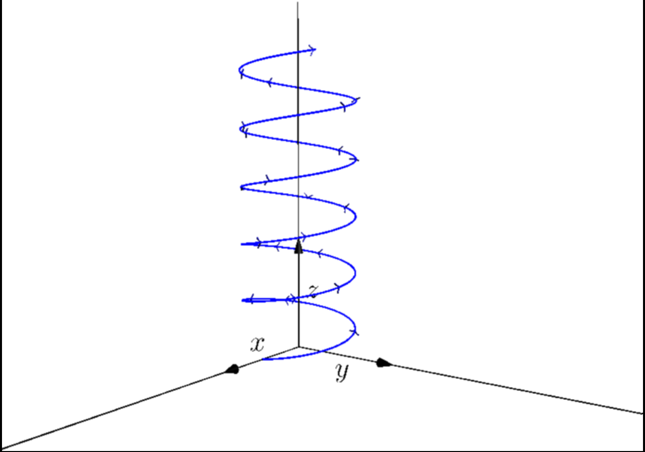


Figure: Repère orthonormé direct

Sommaire

Sommaire

Application linéaire

$$f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \quad \text{pour tous vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v}$$

$$f(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) \qquad \text{pour tout vecteur } \overrightarrow{u} \text{ et tout nombre réel } \alpha$$

Donc si

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

alors

$$f(\overrightarrow{u}) = xf\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yf\left(\overrightarrow{e_2}\right) + zf\left(\overrightarrow{e_3}\right)$$

Application linéaire

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \quad \text{pour tous vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v}$$

$$f(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) \qquad \text{pour tout vecteur } \overrightarrow{u} \text{ et tout nombre réel } \alpha$$

Donc si

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

alors

$$f(\overrightarrow{u}) = xf\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yf\left(\overrightarrow{e_2}\right) + zf\left(\overrightarrow{e_3}\right)$$

Application linéaire

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \quad \text{pour tous vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v}$$

$$f(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) \qquad \text{pour tout vecteur } \overrightarrow{u} \text{ et tout nombre réel } \alpha$$

Donc si

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

alors

$$f(\overrightarrow{u}) = xf\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yf\left(\overrightarrow{e_2}\right) + zf\left(\overrightarrow{e_3}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f\left(\overrightarrow{e}_1\right) & f\left(\overrightarrow{e}_2\right) & f\left(\overrightarrow{e}_3\right) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{matrix} \end{array}$$

Cela traduit par exemple le fait que :

$$f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f\left(\overrightarrow{e}_1\right) & f\left(\overrightarrow{e}_2\right) & f\left(\overrightarrow{e}_3\right) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Cela traduit par exemple le fait que :

$$f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}$$

Sommaire

B : 3 lignes 3 colonnes

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

A : 3 lignes 3 colonnes

$C = A \times B$: 3 lignes 3 colonnes

B : 3 lignes 3 colonnes

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

A : 3 lignes 3 colonnes

$C = A \times B$: 3 lignes 3 colonnes

B : 3 lignes 3 colonnes

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{21} \times b_{12}$

A : 3 lignes 3 colonnes

$C = A \times B$: 3 lignes 3 colonnes

B : 3 lignes 3 colonnes

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$\boxed{a_{22} \times b_{22}}$

A : 3 lignes 3 colonnes

$C = A \times B$: 3 lignes 3 colonnes

B : 3 lignes 3 colonnes

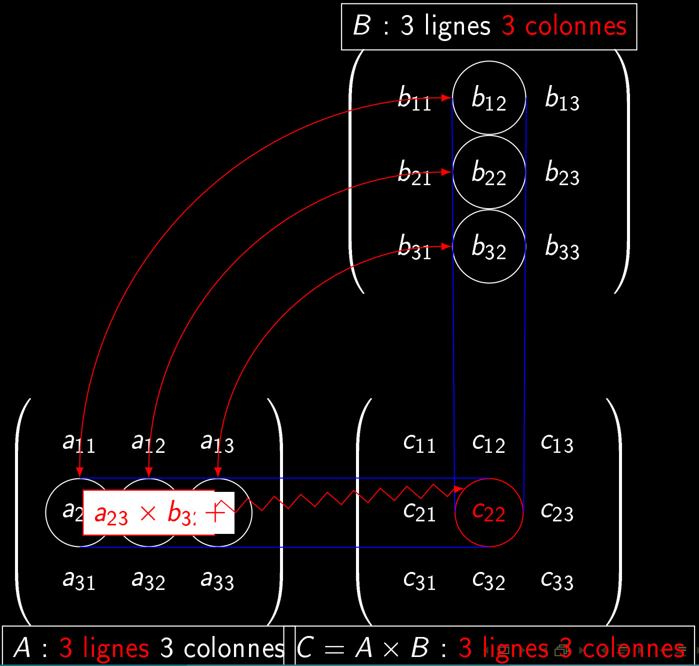
$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

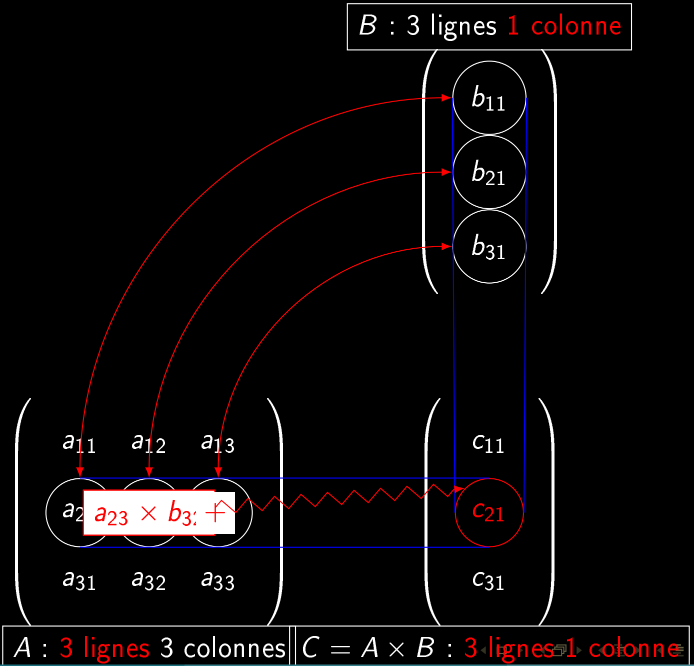
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$\boxed{a_{23} \times b_{32}}$

A : 3 lignes 3 colonnes

$C = A \times B$: 3 lignes 3 colonnes


B : 3 lignes 3 colonnes
b11 b12 b13
b21 b22 b23
b31 b32 b33
a11 a12 a13
a23 × b32 +
a31 a32 a33
c11 c12 c13
c21 c22 c23
c31 c32 c33
A : 3 lignes 3 colonnes
C = A × B : 3 lignes 3 colonnes



B : 3 lignes 1 colonne
b_{11}
b_{21}
b_{31}
a_{11} a_{12} a_{13}
$a_{23} \times b_{3}$ +
a_{31} a_{32} a_{33}
c_{11}
c_{21}
c_{31}
A : 3 lignes 3 colonnes
$C = A \times B$: 3 lignes 1 colonne

Sommaire

Sommaire

Notons $\overrightarrow{v}$ le vecteur de la translation de coordonnées (a, b, c) dans une base orthonormée.
On obtient immédiatement que :

$$
\begin{aligned}
t(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = (1+a)\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\\
t(\overrightarrow{e_2}) &= \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = a\overrightarrow{e_1} + (1+b)\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\\
t(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_3} + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + (1+c)\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}
$$

Notons $\overrightarrow{v}$ le vecteur de la translation de coordonnées (a, b, c) dans une base orthonormée.
On obtient immédiatement que :

$$t\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = (1+a)\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$$
$$t\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = a\overrightarrow{e_1} + (1+b)\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$$
$$t\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_3} + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + (1+c)\overrightarrow{e_3}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} t(\overrightarrow{e}_1) & t(\overrightarrow{e}_2) & t(\overrightarrow{e}_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Sommaire

Dans un premier temps, nous étudierons une rotation d'axe $\overrightarrow{e_3}$.

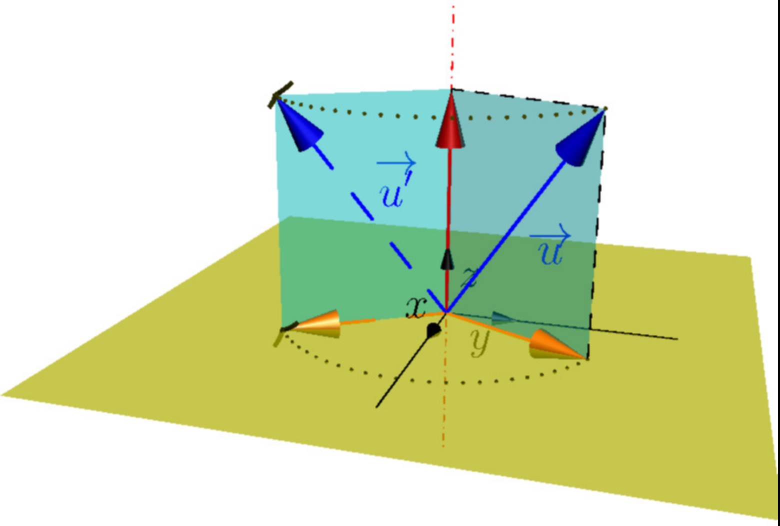


Figure: Rotation d'un vecteur

On observe que $\overrightarrow{e_3}$ est invariant car il a la même direction que l'axe de rotation.
Il suffit donc de se placer dans le plan $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ et de déterminer les images des deux vecteurs de base.

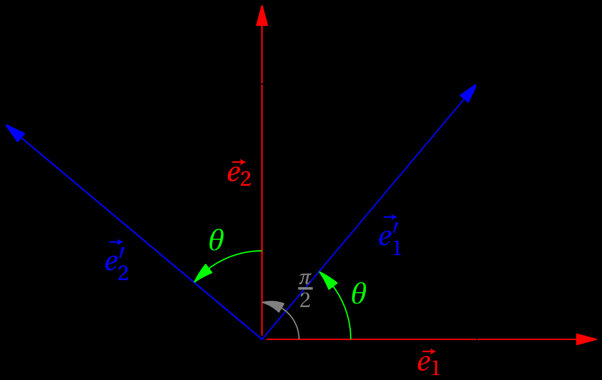


Figure: Projection orthogonale de la rotation d'un vecteur

$$\overrightarrow{e'_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e'_2} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

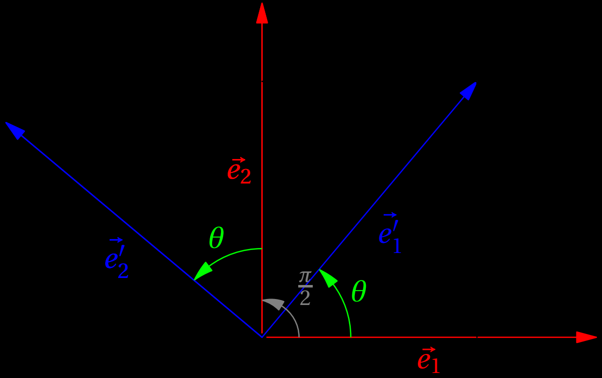


Figure: Projection orthogonale de la rotation d'un vecteur

$$\overrightarrow{e_1'} = \cos\theta\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_2'} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = \sin\theta\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\overrightarrow{e_2}$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} r\left(\overrightarrow{e_1}\right) & r\left(\overrightarrow{e_2}\right) & r\left(\overrightarrow{e_3}\right) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array}
\end{array}
$$

Sommaire

Sommaire

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z). Cela signifie que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$.
Soit r la rotation d'axe $\overrightarrow{e_3}$ et d'angle θ.

On obtient alors que :

$$\begin{aligned}
r(\overrightarrow{u}) &= xr\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yr\left(\overrightarrow{e_2}\right) + zr\left(\overrightarrow{e_3}\right) \\
&= x\left(\cos(\theta)\overrightarrow{e_1} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_2}\right) + y\left(-\sin(\theta)\overrightarrow{e_1} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_2}\right) + z\overrightarrow{e_3} \\
&= (x\cos(\theta) - y\sin(\theta))\overrightarrow{e_1} + (x\sin(\theta) + y\cos(\theta))\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

Notons R la matrice de r dans la base canonique et U la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base canonique. Calculons $R \times U$

$$\begin{array}{cc} & \boxed{U} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -(\sin(\theta)) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ z \end{pmatrix} \\ \boxed{R} & \boxed{R \times U} \end{array}$$

Sommaire

Propriété : expression matricielle de l'image d'un vecteur

Soit M la matrice d'un déplacement dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
Soit U la matrice colonne des coordonnées d'un certain vecteur $\overrightarrow{u}$ dans cette base.
Alors la matrice colonne des coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans cette base vaut :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f(\overrightarrow{u}) = M \times U$$

Sommaire

Retenir : composée d'applications

On note $\varphi \circ g$ l'application composée de g suivie de f (attention à l'ordre !).
Ainsi, $\varphi \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$: on calcule $g(x)$ puis on calcule l'image par f du vecteur obtenu.

Considérons deux déplacements f et g.

Notons $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$, $N = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \overrightarrow{u}$.

Or

$$f \circ g(\overrightarrow{u}) = f\Big(g(\overrightarrow{u})\Big)$$

donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g(\overrightarrow{u}) = M \times (N \times U) = (M \times N) \times U$$

Considérons deux déplacements f et g.
Notons $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$, $N = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \overrightarrow{u}$.
Or

$$f \circ g(\overrightarrow{u}) = f\Big(g(\overrightarrow{u})\Big)$$

donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g(\overrightarrow{u}) = M \times (N \times U) = (M \times N) \times U$$

Considérons deux déplacements f et g.
Notons $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$, $N = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \overrightarrow{u}$.
Or

$$f \circ g(\overrightarrow{u}) = f\Big(g(\overrightarrow{u})\Big)$$

donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g(\overrightarrow{u}) = M \times (N \times U) = (M \times N) \times U$$

Considérons deux déplacements f et g.
Notons $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$, $N = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \overrightarrow{u}$.
Or

$$f \circ g(\overrightarrow{u}) = f\Big(g(\overrightarrow{u})\Big)$$

donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g(\overrightarrow{u}) = M \times (N \times U) = (M \times N) \times U$$

Propriété : expression matricielle de la composée de deux applications linéaires

Soit M la matrice d'un déplacement dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
Soit N la matrice d'un déplacement dans la même base.
Alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g = M \times N$$

En particulier, avec les notations habituelles,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g(\overrightarrow{u}) = (M \times N) \times U$$

Sommaire

Sommaire

un nombre non nul admet un inverse pour la multiplication des nombres réels signifie que pour tout réel non nul x, il existe un nombre réel non nul x^{-1} tel que $x \times x^{-1} = 1$. On dit alors que ce nombre est inversible pour la multiplication des réels.

Sommaire

Il est aisé de vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre du produit des matrices. Notons I_3 cette matrice.

Chercher l'inverse d'une matrice M, c'est donc déterminer la matrice M^{-1}, **si elle existe**, telle que $M \times M^{-1} = I_3$.

Il est aisé de vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre du produit des matrices. Notons I_3 cette matrice.
Chercher l'inverse d'une matrice M, c'est donc déterminer la matrice M^{-1}, **si elle existe**, telle que $M \times M^{-1} = I_3$.

Définition (inverse d'une matrice)

Une matrice M est inversible dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une matrice notée M^{-1} telle que

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_3$$

On appelle alors M^{-1} l'inverse de M dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Sommaire

Deux vecteurs du plan de coordonnées (a, b) et (a', b') sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
Il existe donc un réel λ tel que $a = \lambda a'$ et $b = \lambda b'$

$$ab' - a'b = \lambda ab - \lambda ab = 0$$

On appelle <u>déterminant</u> de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ le nombre $ab' - a'b$

Deux vecteurs du plan de coordonnées (a, b) et (a', b') sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
Il existe donc un réel λ tel que $a = \lambda a'$ et $b = \lambda b'$

$$ab' - a'b = \lambda ab - \lambda ab = 0$$

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ le nombre $ab' - a'b$

Deux vecteurs du plan de coordonnées (a, b) et (a', b') sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
Il existe donc un réel λ tel que $a = \lambda a'$ et $b = \lambda b'$

$$ab' - a'b = \lambda ab - \lambda ab = 0$$

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ le nombre $ab' - a'b$

Deux vecteurs du plan de coordonnées (a, b) et (a', b') sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
Il existe donc un réel λ tel que $a = \lambda a'$ et $b = \lambda b'$

$$ab' - a'b = \lambda ab - \lambda ab = 0$$

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ le nombre $ab' - a'b$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Sommaire

$$(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (1+6) - 2(2-9) - 2(-4-3) \\ &= 7 + 14 + 14 \\ &= 35\end{aligned}$$

Théorème (déterminant d'une matrice inversible)

Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Sommaire

Sommaire

Définition (produit scalaire)

Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z').

On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ et on note $\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} \right\rangle$ le nombre réel :

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} \right\rangle = xx' + yy' + zz'$$

Sommaire

Définition (matrice transposée)

On appelle transposée de la matrice A et on note ${}^{t}A$ la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ deux vecteurs de représentations matricielles respectives V et V' dans une certaine base orthonormée.
Pour obtenir matriciellement le produit scalaire des deux vecteurs, on effectue le produit $V \times {}^{t}V'$.

Définition (vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Sommaire

Définition (norme d'un vecteur)

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur. On appelle norme de $\overrightarrow{v}$ le nombre noté $\|\overrightarrow{v}\|$ et défini par :

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}$$

Ainsi, si $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé, alors $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Cela vous rappelle sûrement un vieux théorème de collège...

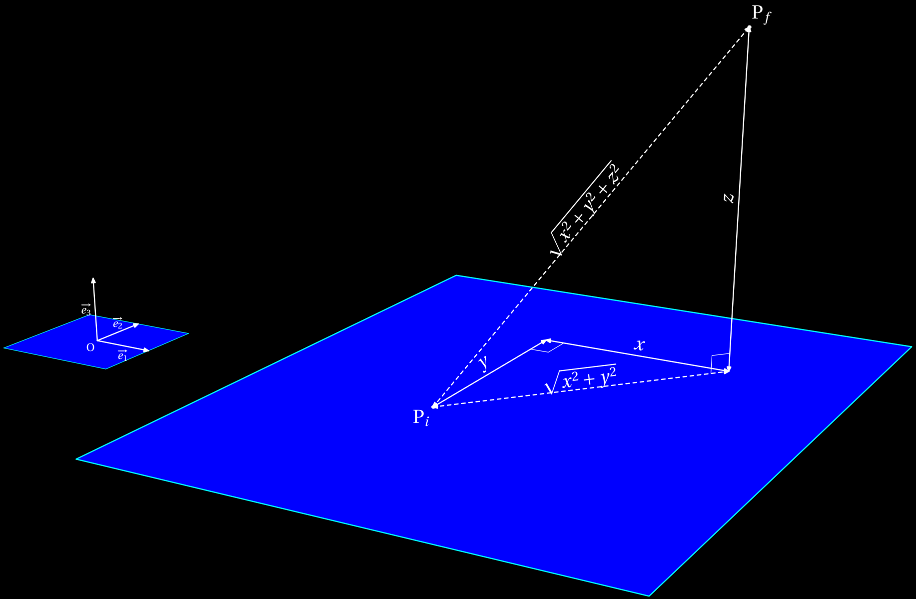


Figure: norme d'un vecteur

Sommaire

Définition (matrice orthogonale)

Une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, elle est inversible et $A^{-1} = {}^{t}A$

Théorème (caractérisation d'une matrice orthogonale)

Une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$.

Reprenons la matrice d'une rotation d'angle θ et d'axe (Oz) et appelons C_1, C_2 et C_3 ses colonnes :

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Reprenons la matrice d'une rotation d'angle θ et d'axe (Oz) et appelons C_1, C_2 et C_3 ses colonnes :

$$R = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^tC_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut
$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^{t}C_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut
$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^{t}C_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut
$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^{t}C_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut
$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^{t}C_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut
$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^{\mathrm{t}}C_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Alors la norme du vecteur associé à C_1 vaut
$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = 1$.
Il en va de même pour C_2 et C_3.
Formons à présent les produits scalaires :

$$C_1 \times {}^{\mathrm{t}}C_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

Il en va de même pour C_1 et C_3 ainsi que pour C_2 et C_3.
La matrice de cette rotation est donc orthogonale.

Sommaire

Propriété : déterminant d'une transposée et d'un produit

$$\det {}^{\mathrm{t}}A = \det A$$

$$\det A \times B = \det A \cdot \det B$$

Théorème (déterminant d'une matrice orthogonale)

Une matrice orthogonale a pour déterminant 1 ou -1

Théorème (Détermination de l'axe d'une rotation)

Si A est une matrice orthogonale de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ différente de l'identité et dont le déterminant vaut 1, alors A est la matrice d'une rotation autour d'un axe. La direction de l'axe est donnée en déterminant un vecteur invariant.

Voilà pour l'axe. En ce qui concerne l'angle, nous aurons besoin...d'une nouvelle définition !

Définition (trace d'une matrice carrée)

La trace d'une matrice, notée $\mathrm{tr}(A)$ est la somme des éléments de sa diagonale.

Exemple

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trace vaut $2\cos\theta + 1$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trace vaut $2\cos\theta + 1$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trace vaut $2\cos\theta + 1$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trace vaut $2\cos\theta + 1$.

Or il existe une belle propriété qui dit que la trace ne change pas lorsqu'on effectue des changements de base et donc...

Théorème (détermination du cosinus de l'angle d'une rotation)

Soit r une rotation de matrice A dans une certaine base. Alors l'angle θ de la rotation vérifie :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(A) - 1}{2}$$

Or il existe une belle propriété qui dit que la trace ne change pas lorsqu'on effectue des changements de base et donc...

Théorème (détermination du cosinus de l'angle d'une rotation)

Soit r une rotation de matrice A dans une certaine base. Alors l'angle θ de la rotation vérifie :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(A) - 1}{2}$$

Sommaire

Définition (produit vectoriel)

Soit $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormée directe.
On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ et on note $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'}$ le vecteur dont les coordonnées sont :

$$\left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

On peut vérifier assez facilement que le vecteur $v \wedge v'$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{v}$ et à $\overrightarrow{v'}$.

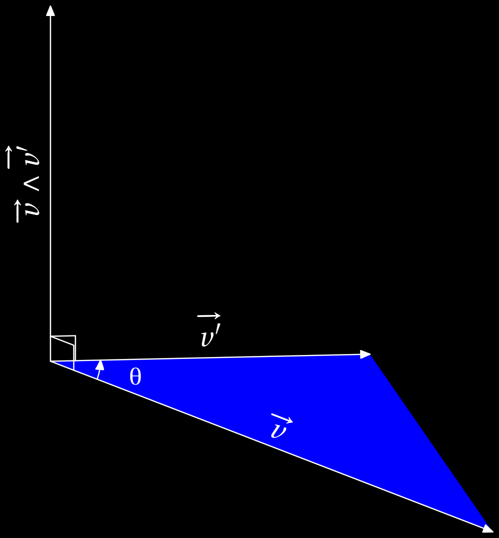


Figure: produit vectoriel

On peut vérifier assez facilement que le vecteur $v \wedge v'$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{v}$ et à $\overrightarrow{v'}$.

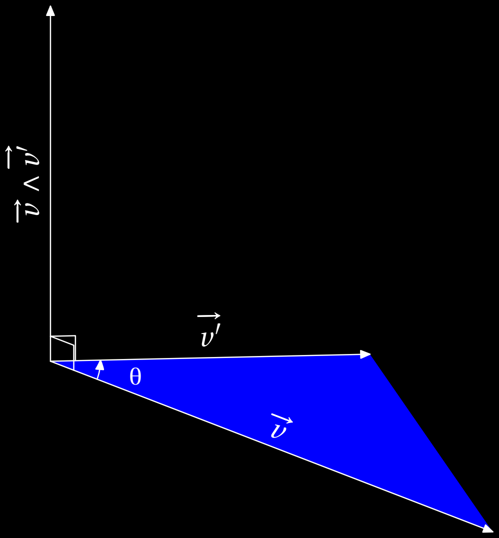


Figure: produit vectoriel

On montre aussi le résultat important suivant :

$$\left\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'}\right\| = \|\overrightarrow{v}\| \times \left\|\overrightarrow{v'}\right\| \times \left|\sin\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}\right)\right|$$

Remarque : disposition pratique

Une méthode peu orthodoxe mais pratique de retenir la formule de calcul du produit scalaire est de le disposer comme un déterminant d'une matrice de taille 3 :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

puis de développer par rapport à la première ligne :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

Remarque : disposition pratique

Une méthode peu orthodoxe mais pratique de retenir la formule de calcul du produit scalaire est de le disposer comme un déterminant d'une matrice de taille 3 :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

puis de développer par rapport à la première ligne :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

Remarque : disposition pratique

Une méthode peu orthodoxe mais pratique de retenir la formule de calcul du produit scalaire est de le disposer comme un déterminant d'une matrice de taille 3 :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

puis de développer par rapport à la première ligne :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

Remarque : disposition pratique

Une méthode peu orthodoxe mais pratique de retenir la formule de calcul du produit scalaire est de le disposer comme un déterminant d'une matrice de taille 3 :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

puis de développer par rapport à la première ligne :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

Remarque : disposition pratique

Une méthode peu orthodoxe mais pratique de retenir la formule de calcul du produit scalaire est de le disposer comme un déterminant d'une matrice de taille 3 :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

puis de développer par rapport à la première ligne :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

On peut donc montrer que $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{v}$

Remarque : règle du tire-bouchon

Très grossièrement, quand on « tourne » de $\overrightarrow{v}$ vers $\overrightarrow{v'}$, on « monte le long » de $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'}$ et ~~vis~~ vice-versa

Sommaire

Exemple

On connaît la matrice d'une certaine application dans une certaine base :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifiez que la matrice est orthogonale.
Calculez son déterminant. Conclusion ?

Exemple

On connaît la matrice d'une certaine application dans une certaine base :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifiez que la matrice est orthogonale.
Calculez son déterminant. Conclusion ?

Exemple

On connaît la matrice d'une certaine application dans une certaine base :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifiez que la matrice est orthogonale.

Calculez son déterminant. Conclusion ?

Exemple

On connaît la matrice d'une certaine application dans une certaine base :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifiez que la matrice est orthogonale.
Calculez son déterminant. Conclusion ?

Pour déterminer l'axe, on va chercher un vecteur de représentation matricielle $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ invariant par la rotation donc tel que $A \times V - V$ soit égal à la matrice colonne nulle. On obtient après simplification (faites le calcul...) :

$$\begin{pmatrix} \frac{-x-y-2z}{3} \\ \frac{2x-y+z}{3} \\ \frac{x-2y-z}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{-x-y-2z}{3} = 0 \\ \frac{2x-y+z}{3} = 0 \\ \frac{x-2y-z}{3} = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions car en additionnant les deux premières lignes on obtient la troisième. On choisit une des inconnues comme paramètre (par exemple z) et on résout le système résultant ayant maintenant deux équations et deux inconnues.

cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{-x-y-2z}{3} = 0 \\ \frac{2x-y+z}{3} = 0 \\ \frac{x-2y-z}{3} = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions car en additionnant les deux premières lignes on obtient la troisième. On choisit une des inconnues comme paramètre (par exemple z) et on résout le système résultant ayant maintenant deux équations et deux inconnues.

On obtient $x = -z$ et $y = -z$.

L'axe de la rotation est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, 1, -1)$.

On obtient $x = -z$ et $y = -z$.
L'axe de la rotation est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, 1, -1)$.

Pour l'angle, on sait que $\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(A)-1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.
On obtient donc que $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ à un multiple de 2π près.
Pour déterminer le signe, il nous faut un autre renseignement : nous allons utiliser le produit vectoriel.

Pour l'angle, on sait que $\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(A)-1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.
On obtient donc que $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ à un multiple de 2π près.
Pour déterminer le signe, il nous faut un autre renseignement : nous allons utiliser le produit vectoriel.

Pour l'angle, on sait que $\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(A)-1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.
On obtient donc que $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ à un multiple de 2π près.
Pour déterminer le signe, il nous faut un autre renseignement : nous allons utiliser le produit vectoriel.

Nous allons déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$.
Il faut donc s'arranger pour que le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ soit nul.
Si nous posons (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ alors $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = x + y - z$.
Nous pouvons donc choisir $(1, 0, 1)$ pour les coordonnées de $\overrightarrow{n}$.

Nous allons déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$.
Il faut donc s'arranger pour que le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ soit nul.
Si nous posons (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ alors $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = x + y - z$.
Nous pouvons donc choisir $(1, 0, 1)$ pour les coordonnées de $\overrightarrow{n}$.

Nous allons déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$.
Il faut donc s'arranger pour que le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ soit nul.
Si nous posons (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ alors $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = x + y - z$.
Nous pouvons donc choisir $(1, 0, 1)$ pour les coordonnées de $\overrightarrow{n}$.

Nous allons déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$.
Il faut donc s'arranger pour que le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ soit nul.
Si nous posons (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ alors $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = x + y - z$.
Nous pouvons donc choisir $(1, 0, 1)$ pour les coordonnées de $\overrightarrow{n}$.

Déterminons à présent l'image de $\overrightarrow{n}$ par la rotation :

$$\boxed{N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A}$$

Donc $r(\overrightarrow{n})$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Déterminons à présent l'image de $\overrightarrow{n}$ par la rotation :

$$\begin{array}{cc} & \boxed{N} \\ & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \boxed{A} & \end{array}$$

Donc $r(\overrightarrow{n})$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Déterminons à présent l'image de $\overrightarrow{n}$ par la rotation :

$$\begin{array}{cc}
 & \boxed{N} \\
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boxed{A} &
\end{array}$$

Donc $r(\overrightarrow{n})$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Calculons à présent le produit vectoriel de $\overrightarrow{n}$ par $r(\overrightarrow{n})$:

$$\overrightarrow{n} \wedge r(\overrightarrow{n}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{v}$$

Calculons à présent le produit vectoriel de $\overrightarrow{n}$ par $r(\overrightarrow{n})$:

$$\overrightarrow{n} \wedge r(\overrightarrow{n}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{v}$$

Théorème (rotation et produit vectoriel)

Si l'axe d'une rotation r est dirigé par un vecteur $\overrightarrow{v}$ et si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur du plan orthogonal à $\overrightarrow{v}$ alors

$$\overrightarrow{n} \wedge r(\overrightarrow{n}) = \frac{\|\overrightarrow{n}\| \times \|r(\overrightarrow{n})\|}{\|\overrightarrow{v}\|} \times \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{v}$$

Ainsi, $-\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{v}$.

Nous en déduisons que $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $-\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{v}$.

Nous en déduisons que $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

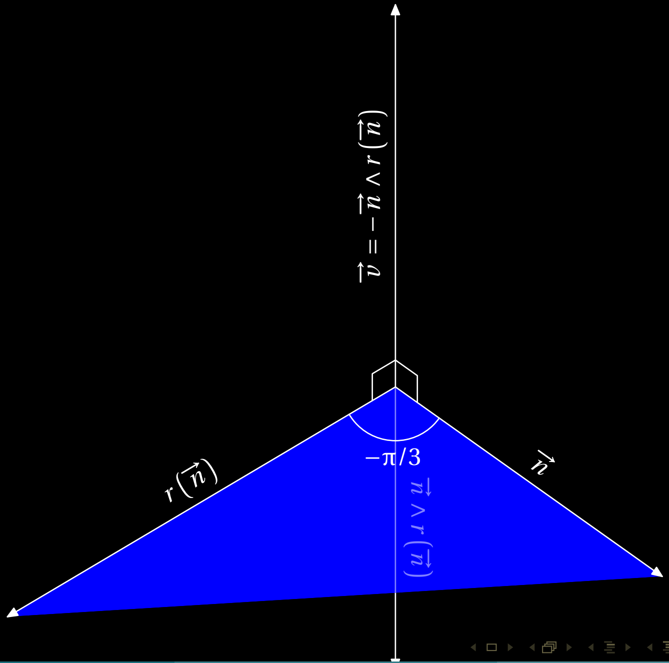
Or $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $-\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{v}$.

Nous en déduisons que $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.

Finalement, A est la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, 1, -1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.



$\vec{v} = -\vec{n} \wedge r(\vec{n})$
$r(\vec{n})$
$-\pi/3$
$\vec{n}$
$\vec{n} \wedge r(\vec{n})$

Sommaire

Sommaire

On connaît la matrice A d'une rotation relativement à une certaine base, généralement une base orthonormée dont un des vecteurs dirige l'axe de la rotation.

On voudrait alors connaître la matrice de cette rotation mais relativement à une autre base...

On connaît la matrice A d'une rotation relativement à une certaine base, généralement une base orthonormée dont un des vecteurs dirige l'axe de la rotation.
On voudrait alors connaître la matrice de cette rotation mais relativement à une autre base...

Sommaire

Définition (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ou encore $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_1'} & \overrightarrow{e_2'} & \overrightarrow{e_3'} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

À noter : si les bases sont orthonormées alors les matrices de passage seront orthogonales.

Définition (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ou encore $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} & \overrightarrow{e'_3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

À noter : si les bases sont orthonormées alors les matrices de passage seront orthogonales.

Définition (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ou encore $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_1'} & \overrightarrow{e_2'} & \overrightarrow{e_3'} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

À noter : si les bases sont orthonormées alors les matrices de passage seront orthogonales.

Définition (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ou encore $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} & \overrightarrow{e'_3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

À noter : si les bases sont orthonormées alors les matrices de passage seront orthogonales.

Définition (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ou encore $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} & \overrightarrow{e'_3} \end{array} \\
\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}
\begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array}
\end{array}$$

À noter : si les bases sont orthonormées alors les matrices de passage seront orthogonales.

Propriété : matrice de passage inverse

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$$

En particulier, si les bases sont orthonormées :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Propriété : matrice de passage inverse

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$$

En particulier, si les bases sont orthonormées :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = {}^{t}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Propriété : matrice de passage inverse

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$$

En particulier, si les bases sont <u>orthonormées</u> :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Propriété : matrice de passage inverse

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$$

En particulier, si les bases sont orthonormées :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = {}^{t}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Sommaire

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B}$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur :

$$V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ATTENTION !

À un même vecteur correspond une infinité de vecteurs colonnes différents selon la base choisie !

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B}$ sont (x, y, z).
On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur :

$$V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ATTENTION !

À un même vecteur correspond une infinité de vecteurs colonnes différents selon la base choisie !

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B}$ sont (x, y, z).
On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur :

$$V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ATTENTION !

À un même vecteur correspond une infinité de vecteurs colonnes différents selon la base choisie !

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Propriété : changement de coordonnées d'un vecteur

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Notez bien que cette formule donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles !

ATTENTION !

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Propriété : changement de coordonnées d'un vecteur

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Notez bien que cette formule donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles !

À RETENIR!

On peut en fait retenir que les « primes » sont du côté des « primes ».

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Propriété : changement de coordonnées d'un vecteur

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Notez bien que cette formule donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles !

À RETENIR !

On peut en fait retenir que les « primes » sont du côté des « primes ».

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Propriété : changement de coordonnées d'un vecteur

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Notez bien que cette formule donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles !

À RETENIR !

On peut en fait retenir que les « primes » sont du côté des « primes ».

Cette formule n'est donc pas pratique sous cette forme mais sachant que $V = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} V'$, alors

$$V' = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times V$$

et comme nous travaillerons dans des bases orthonormées, nous utiliserons le plus souvent :

$$V' = {}^{t}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V$$

Cette formule n'est donc pas pratique sous cette forme mais sachant que $V = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} V'$, alors

$$V' = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V$$

et comme nous travaillerons dans des bases orthonormées, nous utiliserons le plus souvent :

$$V' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V$$

Cette formule n'est donc pas pratique sous cette forme mais sachant que $V = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} V'$, alors

$$V' = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times V$$

et comme nous travaillerons dans des bases orthonormées, nous utiliserons le plus souvent :

$$V' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V$$

Cette formule n'est donc pas pratique sous cette forme mais sachant que $V = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} V'$, alors

$$V' = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times V$$

et comme nous travaillerons dans des bases orthonormées, nous utiliserons le plus souvent :

$$V' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V$$

Cette formule n'est donc pas pratique sous cette forme mais sachant que $V = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}V'$, alors

$$V' = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times V$$

et comme nous travaillerons dans des bases orthonormées, nous utiliserons le plus souvent :

$$V' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V$$

Sommaire

Soit A la matrice d'une rotation r dans une certaine base. Notons toujours $V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v}$ et $W = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} r(\overrightarrow{v})$ et leurs pendants « primés ».

Nous avons vu que $W = A \times V$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, cela donne :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times W' = A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

et donc

$$W' = \left({}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) \times V'$$

On en déduit que $A' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Nous avons vu que $W = A \times V$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, cela donne :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times W' = A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

et donc

$$W' = \left({}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) \times V'$$

On en déduit que $A' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Nous avons vu que $W = A \times V$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, cela donne :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times W' = A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

et donc

$$W' = \left({}^{t}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) \times V'$$

On en déduit que $A' = {}^{t}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Nous avons vu que $W = A \times V$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, cela donne :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times W' = A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

et donc

$$W' = \left({}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \right) \times V'$$

On en déduit que $A' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Nous avons vu que $W = A \times V$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, cela donne :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times W' = A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

et donc

$$W' = \left({}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) \times V'$$

On en déduit que $A' = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times A \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Théorème (transformation orthogonale et changement de base)

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} f = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \times \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

À RETENIR !

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}"'] & \mathbb{R}^3\ \mathcal{B} \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}"] \\
\mathcal{B}'\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f", "A'"'] & \mathbb{R}^3\ \mathcal{B}'
\end{tikzcd}
$$

Exercice

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ d'une certaine transformation f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

Décrivez f le plus précisément possible.

Exercice

On considère la rotation u d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

- Montrez que $\overrightarrow{v_2}$ de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ dans $\mathcal{B}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$.
- Déterminez un vecteur $\overrightarrow{v_3}$ tel que $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right)$ soit une base orthonormée directe.
- Déterminez $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}\, u$.

Exercice

On considère la rotation u d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

- Montrez que $\overrightarrow{v_2}$ de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ dans $\mathcal{B}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$.
- Déterminez un vecteur $\overrightarrow{v_3}$ tel que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ soit une base orthonormée directe.
- Déterminez $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0} u$.

Exercice

On considère la rotation u d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

- Montrez que $\overrightarrow{v_2}$ de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ dans $\mathcal{B}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$.
- Déterminez un vecteur $\overrightarrow{v_3}$ tel que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ soit une base orthonormée directe.
- Déterminez $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0} u$.

Exercice

On considère la rotation u d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

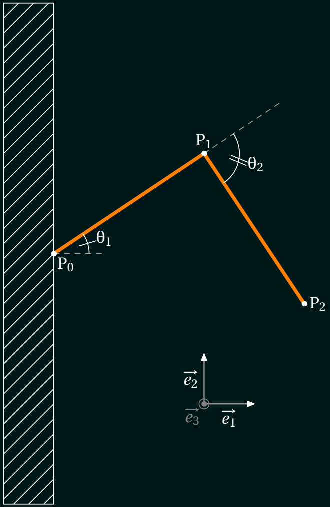
- Montrez que $\overrightarrow{v_2}$ de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ dans $\mathcal{B}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$.
- Déterminez un vecteur $\overrightarrow{v_3}$ tel que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ soit une base orthonormée directe.
- Déterminez $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0} u$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, soit R_x la rotation autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_1}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit R_y la rotation autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit R_z la rotation autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Décrivez $Rx \circ R_z$.

Exercice

On considère le bras de robot dont une vue de dessus est donnée ci-dessous :



Exercice

[Exercice (suite)]
On suppose que les deux segments constituant le bras du robot sont de même longueur ℓ.

- Déterminez les coordonnées de P_2 si $[P_0P_1]$ a effectué une rotation d'angle θ_1 autour de l'axe $(P_0, \overrightarrow{e_3})$ et $[P_1P_2]$ a effectué une rotation d'angle θ_2 autour de l'axe $(P_1, \overrightarrow{e_3})$.
- Calculez les valeurs possibles de θ_1 et θ_2 pour que P_2 ait pour coordonnées $(\frac{\ell}{2}, 0, 0)$.
- Quel mouvement imaginer pour que P_2 soit en $(\frac{\ell}{2}, 4\ell, 0)$?

Exercice

[Exercice (suite)]
On suppose que les deux segments constituant le bras du robot sont de même longueur ℓ.

- Déterminez les coordonnées de P_2 si $[P_0P_1]$ a effectué une rotation d'angle θ_1 autour de l'axe $(P_0, \overrightarrow{e_3})$ et $[P_1P_2]$ a effectué une rotation d'angle θ_2 autour de l'axe $(P_1, \overrightarrow{e_3})$.
- Calculez les valeurs possibles de θ_1 et θ_2 pour que P_2 ait pour coordonnées $(\frac{\ell}{2}, 0, 0)$.
- Quel mouvement imaginer pour que P_2 soit en $(\frac{\ell}{2}, 4\ell, 0)$?

Exercice

[Exercice (suite)]
On suppose que les deux segments constituant le bras du robot sont de même longueur ℓ.

- Déterminez les coordonnées de P_2 si $[P_0P_1]$ a effectué une rotation d'angle θ_1 autour de l'axe $(P_0, \overrightarrow{e_3})$ et $[P_1P_2]$ a effectué une rotation d'angle θ_2 autour de l'axe $(P_1, \overrightarrow{e_3})$.
- Calculez les valeurs possibles de θ_1 et θ_2 pour que P_2 ait pour coordonnées $(\frac{\ell}{2}, 0, 0)$.
- Quel mouvement imaginer pour que P_2 soit en $(\frac{\ell}{2}, 4\ell, 0)$?

Exercice

[Exercice (suite)]
On suppose que les deux segments constituant le bras du robot sont de même longueur ℓ.

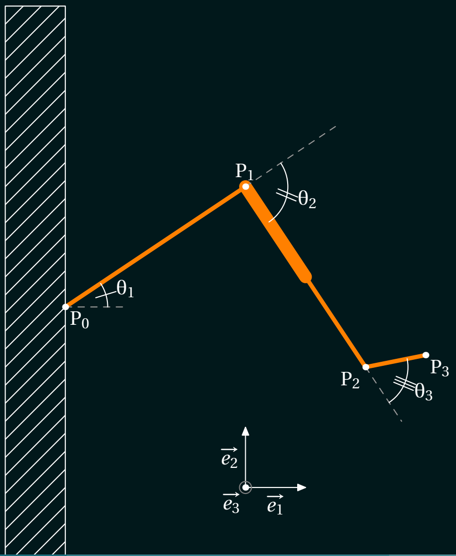
- Déterminez les coordonnées de P_2 si $[P_0P_1]$ a effectué une rotation d'angle θ_1 autour de l'axe $(P_0, \overrightarrow{e_3})$ et $[P_1P_2]$ a effectué une rotation d'angle θ_2 autour de l'axe $(P_1, \overrightarrow{e_3})$.
- Calculez les valeurs possibles de θ_1 et θ_2 pour que P_2 ait pour coordonnées $(\frac{\ell}{2}, 0, 0)$.
- Quel mouvement imaginer pour que P_2 soit en $(\frac{\ell}{2}, 4\ell, 0)$?

Exercice

Voici un nouveau robot qui cette fois à un « avant-bras » $[P_1 P_2]$ dont la longueur est variable et qui est muni d'une « main » $[P_2 P_3]$ de longueur ℓ_3. L'« humérus » $[P_O P_1]$ a une longueur ℓ_1.
On notera ℓ_2 la longueur minimum de l'avant-bras. On a $\ell_3 < \min(\ell_2, \ell_3)$.

Exercice

[Exercice (suite)]



Exercice

[Exercice (fin)]
On note $\mathcal{R}$ le repère d'origine P_0 et de base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. Donnez les coordonnées de P_3 dans $\mathcal{R}$ sachant que l'avant-bras s'est allongé de r par rapport à sa position minimum.

Exercice

Reprendre à présent le robot que vous avez vu « vivre » sur l'animation de la figure **??** page ??